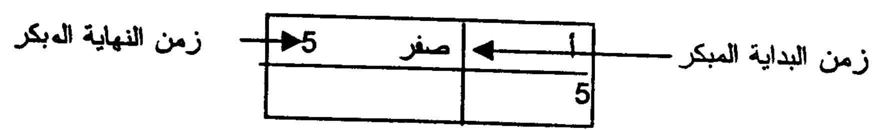
فإذا قمنا بالتطبيق – مثلا– على النشاط (أ) فاننا سوف نجد أن هـذا النشاط يمكن مع بدء المشروع ولهذا فان بدايته المبكر هو (صفر) ، حيث أن هذا النشاط ليس شرطا لبدئه أن ينجز أى نشاط آخر وانما يبـدأ مـع بدايـة المشروع . ونظرا لأن زمن هذا النشاط (زمن انجازه) هو 5 أسـابيع فـإن زمن النهاية المبكر للنشاط (أ) هو (5) { صفر + 5 }

وسوف نقوم بكتابة زمن البداية المبكر ، وزمن النهاية المبكر علـى يسار الرمز الخاص بالنشاط وذلك أعلى المستطيل الذى يمثل نقطة نشـاط ، مع وضع زمن البداية المبكر أولاً ، ثم زمن النهاية المبكر ثانيا كالتالى :

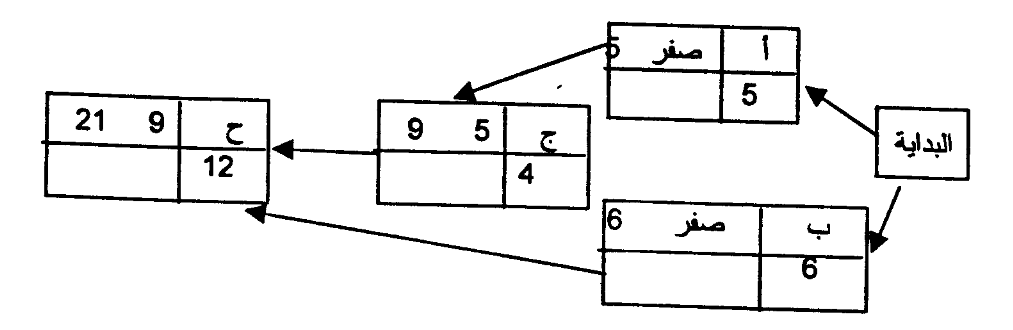


وحيث أن أى نشاط لا يمكن أن يبدأ الا إذا انتهت كل الأنشطة السابقة عليه مباشرة فاننا يمكننا أن نضع القاعدة التالية لحساب زمن البداية المبكر لأى نشاط :

زمن البداية المبكر لأى نشاط **يساوى أطول زمن نهاية مبكر لكـل الأنشطة السابقة عليه** مباشرة وذلك **عند الاتجاه من يمين الشبكة الى يسارها.**

دعنا نطبق هذه القاعدة على جزء من الشبكة والذى يتضمن النقاط أ ، ب ، ج ، ح كما يظهر فى الشكل (6 –3)

شكل (6–3) : حساب زمن البداية المبكر ، وزمن النهاية المبكر لجزء من مشروع التوسع فى مركز زهران التجارى



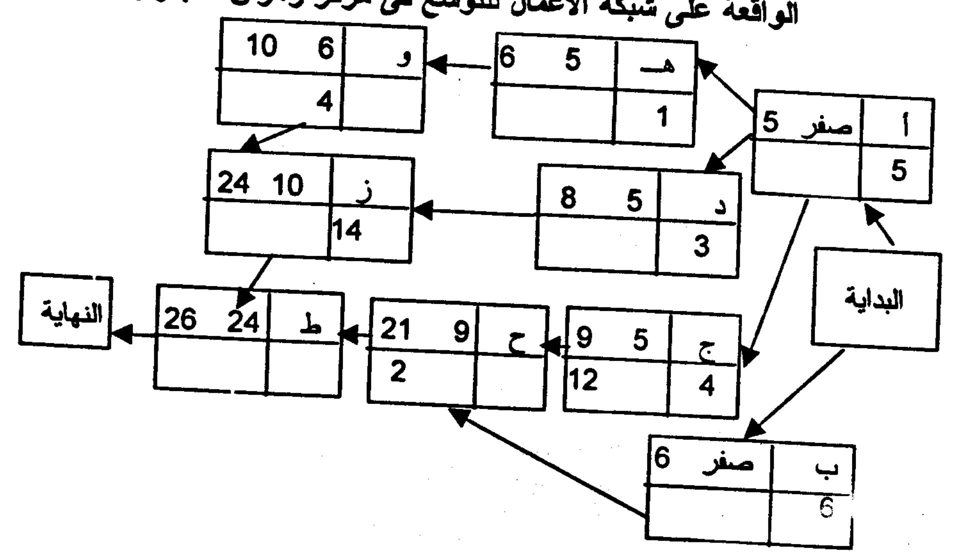
اذا نظرنا للنشاط (أ) سنجد انه يمكنه أن يبدأ فور بداية المشروع ، ومن ثم من زمن البداية المبكر لهذا النشاط = صفر ، فإذا سار أضفنا الى هذا الزمن ذلك الزمن اللازم لاداء النشاط ذاته = ز = 5 فان زمن النهاية المبكر لهذا النشاط يصبح = ب ك + ز = صفر + 5 = 5.

وبالمثل فإن النشاط (ب) يمكن البدء فيه على الفور ، ومن ثم فإن زمن بدايته المبكرة= ب ك = صفر ، فإذا ما أضفنا الى هذا زمن النشاط ذاته : ز = 6 فإننا نصل الى زمن النهاية المبكر لهذا النشاط وهو : ب ك + ز = صفر + 6 = 6 . أما بالنسبة للنشاط (ج) فإنه لا يمكن البدء فيه إلا اذا انجزنا النشاط (أ) بالكامل ، وحيث أن هذا النشاط الاخير (أ) لا ينتهى الا بعد 5 أسابيع (زمن النهاية المبكر) فان النشاط (ج) لا يمكن أن يبدأ الا بعد مرور 5 أسابيع (زمن الانتهاء المبكر من أ) وباضافة زمن النشاط (ج) ذاته : ز = 4 فاننا نحصل على زمن النهاية المبكر للنشاط (ج) كالتالى : ب ك + ز = 5 +4 = 9 . أما النشاط (ح) فهو لا يمكن ان يبدأ إلا اذا انتهى كل من النشاط (ب) ، (ج) ، وقد رأينا ان النشاط (ب) سوف ينتهى بعد 6 أسابيع ، أما النشاط (ج) فسوف ننتهى منه بعد 9 أسابيع ، وحيث أن القاعدة تنص على أخذ الوقت الأطول للنهاية المبكر فإن النشاط (ح) لا يمكن أن يبدأ الا بعد 9 اسابيع أى ان ب ك = 9 . بإضافة زمن النشاط (ح) وهو ز = 12 فان زمن النهاية المبكر للنشاط (ح) يصبح : ب ك + ز = 9 + 12 = 21 اسبوعاً.

واذا طبقنا ذلك على كل الأنشطة الموجودة على شبكة الأعمال واستمرينا فى الحركة من أقصى يمين الشبكة الى أقصى اليسار فإننا يمكننا أن نحدد زمن البداية (المبكر) ، وزمن النهاية المبكر لكل الأنشطة الواقعة عليها، ويظهر ذلك فى الشكل رقم (6-4) . ويلاحظ ان زمن النهاية المبكر

لآخر نشاط يقع على الشبكة (النشاط ط) هو 26 اســبوعا ويعنــى ذلــك أن المشروع ككل يمكن أن ينتهى فى 26 اسبوعاً.

شكل (6-4) : زمن البداية المبكر ، وزمن النهاية المبكر للأنشطة الواقعة على شبكة الأعمال للتوسع فى مركز زهران التجارى



والآن تستطيع أن نستكمل الطريقة الرياضية للوصول الى المسار الحرج وذلك عن طريق العودة من نهاية الشبكة الى بدايتها ، حيث أن هذا المشروع يمكن أن ينتهى فى 126 اسبوع فاتنا سوف نبدأ طريق العودة من النهاية للبداية مــع زمن النهاية المبكر لآخر نشاط وهو النشاط (ط) والزمن الخاص به (نهايـــة مبكر) وهو 26 اسبوعا ولكن دعنا نعطى الرموز التالية أولا :

ب م = زمن البداية المتأخر لأى نشاط

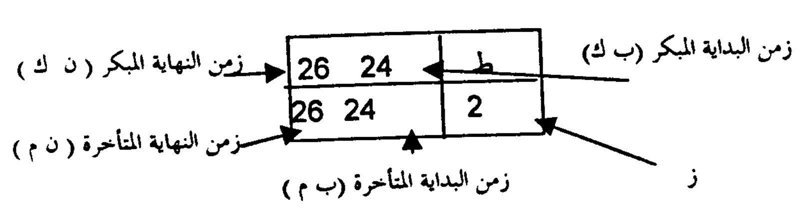
ن م = زمن النهاية المتأخر لأى نشاط .

ويمكن حساب قيمة ب م عن طيق المعادلة

ب م = ن م - ز

دعنا نطبق هذين الزمنيين على النشاط (ط) الموجود فى آخر الشبكة . نحن هنا نجد أن زمن النهاية المتأخر = زمن النهاية المبكر . أى أنه عنـــد

هذا النشاط بالذات (هـ هو النشاط الاخير على الشبكة) سـنجد أن : ن م =
ن ك = 26 ، حيث



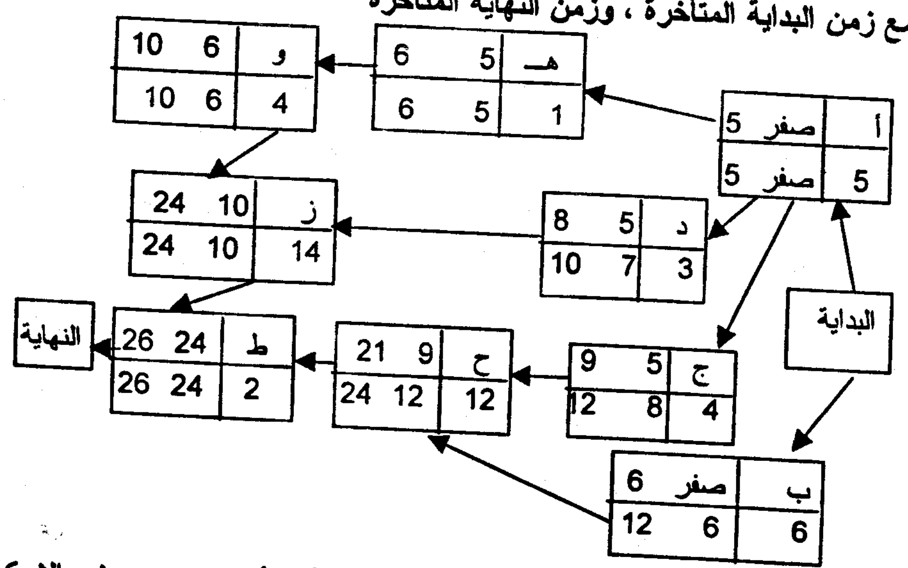
أن الوقت الخاص بهذا النشاط = ز = 2 ، فإن زمـن البدايـة المتـأخرة للنشاط (ط) يصبح : 24 [26 - 2 = 24] [زمن النهاية المتأخرة - زمـن النشاط = ن م - ز]

ويمكننا صياغة القاعدة العامة لحساب زمن النهاية المتأخرة كالتالى:

زمن النهاية المتأخرة لأى نشاط هو اقل زمن من أزمنـة البداية المتأخرة وذلك لكل الأنشطة التى تسبق مباشرة هذا النشاط .

ومنطقياً ، فإن هذه القاعدة تقول آخر زمن يمكن أن ينتهى فيـه أى نشـاط يساوى أصغر قيمة من أزمنة البداية المتأخرة للأنشطة التالية له . ويوضح الشـكل رقم (6-5) شبكة اعمال مشروع التوسع فى مركز زهران التجارى مع حساب كل من زمن البداية المتأخر (ب م) ، وزمن النهاية المتأخر (ن م) لكل نشاط .

شكل رقم(6-5) : شبكة الأعمال لمشروع التوسع فى مركز زهران مع زمن البداية المتأخرة ، وزمن النهاية المتأخرة



وبالنظر الى الشكل نجد أن النشاط (ح) يأتى أثناء العودة على الشبكة من النشاط (ط) وحيث أن زمن البداية المتأخرة للنشاط (ط) يســاوى 24 ، وحيث أن هذا الزمن هو زمن النهاية المتأخرة للنشاط التالى (فى العــودة) وهو النشاط (ح) لذا وضعنا الرقم (24) معبرا عن زمن النهايـــة المتـأخرة للنشاط (ح) . ثم قمنا بعد ذلك بطرح زمن النشاط ذاته: ز = 12 من زمــن النهاية المتأخرة للنشاط لتصبح (ب م = ن م - ز = ب م = 24 - 12=12) . وبالمثل فانه أثناء العودة من النشاط (ط) الى النشاط (ز) نجــد أن زمــن البداية المتأخرة للنشاط (ط = 24) وهى فى نفس الوقت زمن النهاية المتأخرة للنشاط (ز) ، ثم قمنا بطرح زمن النشاط (ز) نفسه من هذا الزمن لتحصــل على زمن البداية المتأخرة للنشاط (ز) (وبالتــالى : ب م = ن م - ز = 24 - 14 = 10).

واستمرينا فى ذلك حتى وصلنا الى النقطة (أ) والتى تســتحق بعــض الايضاح اذا نظرنا الى النقطة (أ) سنجد أننا يمكننا العودة لها (اثناء القــدوم

من نهاية الشبكة لبدايتها) عن طريق ثلاث نقاط وهم (هـــ) ، (د) ، (ج) .
وحيث أن زمن البداية المتأخر للنشاط (هــ)=5 والبداية المتأخرة للنشاط (د) = 7، وللنشاط (ج) = 8 فايهما نختاره لكى يعد زمن النهاية المتأخرة للنشاط (أ)؟
كل ما علينا هو أن نطبق القاعدة السابقة والتى تقول " اقل زمن " مـن أزمنة النهايات المبكرة للانشطة السابقة على النشاط موضع الحســـاب (أ).
ولذا قمنا باختيار الزمن (5) وهو أقل الأزمنة ووضعناه كزمن نهاية متـــأخر للنشاط (أ). والواقع أن هذه القاعدة تنطبق على اى نشاط عند العــودة مــن نهاية الشبكة الى بدايتها.

بعد أن قمنا باستكمال المسارات من يمين الشـــبكة الـــى يســـارها ، وبالعكس فاننا الآن فى وضع يمكننا من حساب الوقت العـــاطل لأى نشـــاط , ويعرف الوقت العاطل بأنه ذلك المدى الزمنى الذى يمكن أن يتأخر فيه انجـاز النشاط دون أن يؤدى ذلك الى زيادة الزمن الكلى لانجاز المشروع . ويمكـــن حساب الوقت العاطل لأى نشاط باستخدام المعادلة التالية :

الوقت العاطل = زمن البداية المتأخرة – زمن البداية المبكرة =
زمن النهاية المتأخرة = زمن النهاية المبكرة .
= ب م – ب ك = ن م – ن ك

فمثلا إذا اخذنا النشاط (ج) وقمنا بحساب الوقت العاطل لـــه ســوف نجده :

ب م – ب ك = 8 – 5 = 3
أو ن م – ن ك = 12 – 9 = 3

ويعنى ذلك أن النشاط (ج) يمكن أن يتأخر فى عملية التنفيذ وذلك حتى 3 أسابيع ومع ذلك يمكن انهاء المشروع ككل – كما هو مجدول له – فـــى 26 اسبوع ، ومعنى ذلك أن النشاط (ج) ليس نشاط حرجا للانتهاء من المشـــروع

فى الزمن المقدر له . دعنا الآن نأخذ النشاط (هـ) . بالنظر الى الشكل (6 - 5) سنجد أن الوقت العاطل لهذا النشاط يساوى

ب م - ب ك = 5 - 5 = صفر

ن م - ن ك = 6 - 6 = صفر

وبالتالى فان الوقت العاطل لهذا النشاط يساوى صفر ، او بمعنى آخر لا يوجد فيه وقت عاطل . ويعنى ذلك أنه لا يمكن أن يحدث تأخير في اداء هذا النشاط دون أن يزداد الوقت اللازم للانتهاء من المشروع ككل. وبمعنى آخر ، فإن تنفيذ هذا النشاط فى الوقت المحدد له يعد أمراً حرجا من زاوية الحفاظ على جدولة زمن المشروع ككل . ولذا يطلق على هذا النشاط اسم النشاط الحرج . وبصفه عامة فان جميع الأنشطة الحرجة هى تلك الأنشطة التى لا يوجد فيها وقتا عاطلاً.

ويمكن ان نضع هذه المعلومات الخاصة بأزمنة الأنشطة الواقعة على الشبكة فى صورة جدول (6-2) .

جدول (6 -2) : الأنشطة وأزمنتها لمشروع التوسع فى مركز زهران التجارى

النشاط	البداية المبكرة ب ك	البداية المتأخرة ب م	النهاية المبكرة ن ك	النهاية المتأخرة ن م	الوقت العاطل ن ك - ن م	المسار الحرج
أ	0	0	5	5	0	نعم
ب	0	6	6	12	6	-
ج	5	8	9	12	3	-
د	5	7	8	10	2	-
هـ	5	5	6	6	0	نعم
و	6	6	10	10	0	نعم
ز	10	10	24	24	0	نعم
ح	9	12	21	24	3	-
ط	24	24	26	26	0	نعم

ومن هذا الجدول يتضح لنا أن الأنشطة أ ، هـ ، و ، ز ، ط هى انشطة ليس فيها وقتا عاطلا ، حيث كانت قيمة الزمن العاطل فى هذه الانشطة صفـوا .. ومن هنا فان المسار المكون من هذه النقاط هو المسار الحرج لمشروع التوسع فى مركز زهران التجارى . كذلك فإن هذا الجدول يوضح الزمن العـاطل أو التأخير الذى يمكن السماح به فى الأنشطة غير الحرجة قبل أن يؤدى ذلك الى زيادة الزمن اللازم للانتهاء من هذا المشروع.

إسهامات كل من بيرت / المسار الحرج

قلنا أن قبل أن يدرى المشروعات ببحوث عن إجراءات تساعدهم فـى الاجابة على عدد من الأسئلة تتعلق بتخطيـط ، وجدولـة ، والرقابـة علـى مشروعاتهم . والآن دعنا ننظر الى هذه الأسئلة التى طرحناها من قبل وذلـك فى ضوء المعلومات التى زودتنا بها تلك الإجراءات الخاصة بحساب المسـار الحرج للمشروع.

1- ما هو الوقت الكلى لانجاز المشروع ؟

الاجابة : ن هذا المشروع يمكن انجازه فى مدة قدرها 26 اسبوعا إذا ما تـم انجاز الانشطة الخاصة به فى موعدها .

2- ما هى الأزمنة المجدولة للبدء والانتهاء من كل نشاط .

الاجابة : إن جدولة الأنشطة الذى يظهر فى الجدول (6-2) يوضح لنا زمن البداية المبكرة ، وزمن النهاية المبكر ، وزمن البداية المتأخر ، وزمن النهايـة المتأخر لكل نشاط على حدة.

3- ما هى الأنشطة " الحرجة " والتى لابد من الانتهاء منـها فـى الوقت المجدول لها تماما حتى يمكن الانتهاء من المشروع ككل فى الوقت المحدد له .

الاجابة : الأنشطة أ ، هـ ، ح ، ز ، ط هى الأنشطة الواقعة على المسار الحرج وبالتالى فهى الأنشطة الحرجة .

4- الى أى يمكن التأخير فى تلك الأنشطة " غير الحرجة " بحيث لا يؤدى هذا التأخير الى زيادة الوقت الكلى اللازم لانجاز المشروع ككل ؟

الاجابة : أن جدولة الانشطة للمشروع كما تظهر فى الجدول (6 -2) توضح تلك الأنشطة والزمن العاطل الخاص بكل نشاط منها .

جدولة المشروعات مع أزمنة غير مؤكدة للأنشطة :

فى هذا الجزء سوف نعرض لتفاصيل جدولة مشروع يتعلق ببرنامج بحوث وتنمية منتج جديد ، ونظرا لأن العديد من الأنشطة الخاصة بهذا المشروع لم يتم التعامل معها من قبل ، فان مدير المشروع يريد جدولة هذا المشروع آخذا فى الحسبان الأزمنة غير المؤكدة لهذه الأنشطة ، دعنا الآن ننظر الى المثال :

تعمل شركة الأضواء فى انتاج نظر المكانس الكهربائية الصناعية لعدد من السنوات وفى خلال هذا الشهر قام أحد أعضاء فريق بحوث تنمية المنتجات الجديدة بتقديم تقريرا يتضمن ان على الشركة أن تفكر فى انتاج مكنسة كهربائية بدون أسلاك كهربائية Wireless ، والتى سوف توجه الى قطاع المنازل . وترى الشركة أن وجود مكنسة كهربائية لاسلكية تحقق ميزة الراحة والسهولة فى الاستخدام داخل المنازل ، ولكنها تعتقد أن نجاح هذا المنتج الجديد يتوقف ايضا على التكلفة المناسبة لانتاجه . وقد أطلقت الشركة على هذا المنتج الجديد اسم المكنسة المحمولة . وترغب إدارة الشركة فى دراسة امكانية تصنيع المكنسة المحمولة وان هذه الدراسة لابد وان تنتهى بتوصية لما يجب أن تفعله الشركة تجاه هذا المنتج الجديد ، ولكى تتم هذه

الدراسة فان الادارة تحتاج الى معلومات من وحدة البحوث والتطوير ، ومـــن وحدة اختبار المنتج ، ومن وحدة الانتاج والتصنيع ، ومـــن وحـدة تقديـر التكاليف ، ومن مجموعة بحوث السوق فى الشركة .

والسؤال هو : ما هى المدة الزمنية اللازمة لانجـاز دراســة الجـدوى ؟ إن الاجابة على هذا السؤل هى التى سوف نتعرض لها فى الجزء القادم :
مرة أخرى فان الخطوة الأولى فى عملية جدولة المشروعات هو القيام بتحديـد وحصر تلك الأنشطة التى يتضمنها المشروع ، ثم بعد ذلك تحديـد الأنشـطة السابقة بشكل مباشر لكل نشاط من هذه الأنشطة ، ويعبر الجدول رقـم (6-3) عن تلك الانشطة اللازمة لانجاز مشروع دراسة الجدوى للمكنسة الكهربائيـة المحمولة ، وكذلك الأنشطة السابقة بشكل مباشر لكل نشاط من هذه الأنشطة .

جدول (6-3) : قائمة الأنشطة الخاصة بمشروع دراسة جدوى المكنسة الكهربائية المحمولة

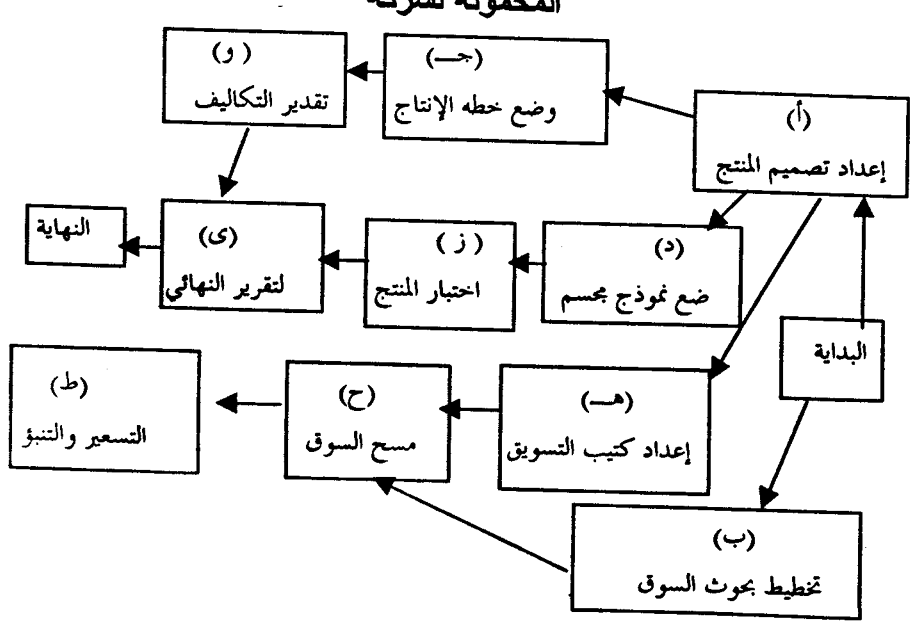
النشاط	الوصف	الأنشطة السابقة مباشرة
أ	تنمية تصميم للمنتج الجديد	-
ب	وضع خطة بحوث السوق	-
ج	وضع خطة الانتاج	أ
د	بناء نموذج مجسم للمنتج	أ
هـ	إعداد كتيب التسويق للمنتج	أ
و	إعداد تقرير تكاليف الانتاج	ج
ز	القيام باختبار اولى للمنتج	د
ح	القيام بدراسة مسحية للسوق	ب، هـ
ط	إعداد تسعير للمنتج والتنبؤ بالمبيعات	ح
ى	اعداد التقرير النهائى	و ، ز ، ط

ويمكن رسم شبكة المشروع - كما يظهر فى الشكل رقم (6-6) وذلك بالاعتماد على المعلومات الواردة فى الجدول (6 -3)

الأزمنة غير المؤكدة للنشاط :

عقب القيام بتنمية الشبكة الخاصة بالمشروع فاننـــا ســوف نحتــاج معلومات عن الزمن المطلوب للقيام باستكمال كل نشاط من الأنشطة الواقعــة على هذه الشبكة . ومثل هذه المعلومات سوف يتم استخدامها فى حساب الوقت الكلى المطلوب لانجاز المشروع ككل وكذلك فى جدولة بعـــض الأنشـــطة ، وعندما تكون هذه المشروعات من النوع الذى يتكرر حدوثه بشكل مســتمر - مثل انشطة البناء والصيانة .. الخ - فان المديريــــة يكــون لديــهم الخــبرة والمعلومات السابقة فى الماضى والتى يمكن ان تستخدم فى تقدير المعلومــات الخاصة بكل نشاط وذلك بشكل صحيح ، ولكن اذا كانت المشـــروعات مــن الفريــــــد والذى لا يتكـــرر

شكل (6-6) : شبكة مشروع دراسة جدوى المكنسة الكهربائية المحمولة لشركة



فأن تقدير الوقت اللازم لكل نشاط يصبح عملية صعبة . وفى الواقع فانه فى أغلب الحالات تكون عملية وضع تقرر لزمن الخاص لكل نشاط عملية غير مؤكدة ولذا لهى توضع فى صورة مدى لقيم زمنية محتملة بدلا من تقدير زمن واحد محدد لكل نشاط . وفى هذه الحالة فان الأزمنة غير المؤكدة للنشاط يتم معالجتها على أنها متغيرات عشوائية لها توزيعاتها الاحتمالية . وكنتيجة لذلك فإنه يتم إعداد جملة احتمالية حول إمكانية انجاز المشروع فى وقت معين .

وحتى يمكن تضمين الأزمنة غير لمؤكدة للنشاط فى التحليل فنحن نحتاج الى وضع تقديرات لثلاثة انواع من الزمن لكل نشاط وهى :

الزمن المتفائل (ل) - اقل زمن لانجاز النشاط لو أن كل شئ سار على ما يرام

الزمن الأكثر احتمالا (ك)- ذلك الزمن الذى له أعلى الاحتمالات فى ظل الظروف العادية

الزمن المتشائم (م) - اقصى زمن لانجاز النشاط لو حدث تأخيرات مؤثرة اثناء انجاز المشروع.

وحتى يمكن توضيح الاجراءات الخاصة بطريقة بيرت/ أو المسار الحرج وذلك فى حالة الأزمنة غير المؤكدة دعنا ننظر الى التقديرات المعطاة للازمنة المتفائلة والاكثر احتمالا والمتشائمة لأنشطة مشروع دراسة جدوى المكنسة الكهربائية المحمولة والتى تظهر فى الجدول (6 – 4) واذا أخذنا من هذا الجدول النشاط (أ) على سبيل المثال فاننا نجد أن الزمن الأكثر احتمالا له هو 5 اسابيع مع مدى زمنى يتراوح بين 5 أسابيع (الزمن المتفائل) ، 12 اسبوع (الزمن المتشائم ، ولو ان هذه الأنشطة تم إعادة ادائها لعدد كبير من المرات فما هو متوسط الزمن الخاص بكل نشاط؟ الواقع ان هذا المتوسط (او ما يسمى بالزمن المتوقع = ع) هو كما يلى :

$$ع = \frac{ل + 4ك + م}{6}$$

فبالنسبة للنشاط (أ) فان المتوسط او الزمن المتوقع ك يساوى

$$ع_1 = \frac{4 + 4(5) + 12}{6}$$

$$= \frac{36}{6} = 6 \text{ أسابيع}$$

جدول (6-4) : تقدير الزمن الاكثر احتمالا والمتفائل والمتشائم وذلك للأنشطة الخاصة بمشروع دراسة المكنسة الكهربائية المحمولة بالاسابيع

النشاط	الزمن المتفائل (ل)	الزمن الاكثر احتمالا (ك)	الزمن المتشائم (م)
أ	4	5	12
ب	1	1.5	5
ج	2	3	4
د	3	4	11
هـ	2	3	4
و	1.5	2	2.5
ز	1.5	3	4.5
ح	2.5	3.5	7.5
ط	1.5	2	2.5
ى	1	2	3

ومع وجود ازمنة غير مؤكدة يمكننا استخدام التباين Variance لكــى نصيف ذلك التشتت او الاختلافات فى قيم ازمنة النشــاط ، ويمكــن حســاب التباين الخاص بأزمنة النشاط عن طريق استخدام المعادلة التالية :

$$\text{التباين} = ن^2 = \left(\frac{م - ل}{6}\right)^2$$

والواقع ان هذه المعادلة الخاصة بالتباين قد تم استقائها من الفكرة العامة التى ترى بأن الانحراف المعيارى يمثل تقريبا $\frac{1}{6}$ قيمة الفرق بين القيمتين النقيصتين فى التوزيع وهما فى حالتنا القيمة المتفائلة ، والقيمة المتشائمة ، والتباين هو مربع الانحراف المعيارى .

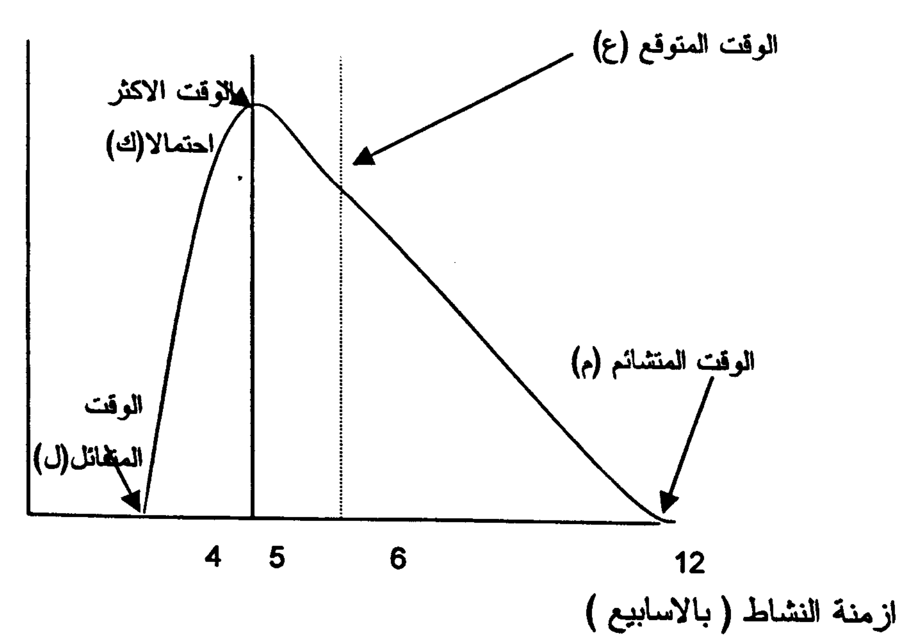
ومن هنا فان الفارق الذى يوجد بين القيمة الخاصة بالزمن المتشائم (م) ، والقيمة الخاصة بالزمن المتفائل (ل) يؤثر - ولا شك - على قيمة التباين . فالفارق الكبير بين القيمتين يعبر عن درجة عدم تأكد عالية فيما يتعلق بزمن النشاط .

ويمكننا باستخدام المعادلة السابقة القيام بحساب قيمة التباين للنشاط (أ) كما يلى :

$$ن^2_أ = \left(\frac{12 - 4}{6}\right)^2 = \left(\frac{8}{6}\right)^2 = 1.78$$

وتقوم معادلتى حساب متوسط الزمن المتوقع (ع) والتباين ن ^{2} لى اساس افتراض ان توزيع زمن الأنشطة يمكن وصفه بأنه التوزيع الاحتمالى لبيتا ، ومع هذا الافتراض فانم التوزيع الاحتمالى لبيتا للزمن الخاص بانجاز النشاط (أ) يظهر فى الشكل (6-7)

شكل 6 -7 : توزيع زمن النشاط (أ) لمشروع دراسة جدوى تقييم المكنسة الكهربائية المحمولة .



ازمنة النشاط (بالاسابيع)

وباستخدام معادلتى حساب الزمن المتوقع (ع) ، والتباين (ن2) والمعلومات الواردة فى الجدول (6-4) تم حساب الزمن المتوقع ، والتباين لكل الأنشطة الخاصة بالمشروع ، ويلخص الجدول رقم (6-5) هذا الحساب.

جدول (6-5) : الأزمنة المتوقعة والتباين لانشطة مشروع دراسة الجدوى لتقديم المكنسة الكهربائية المحمولة .

النشاط	الزمن المتوقع (ع)	التباين ($ن^2$)
أ	6	1.78
ب	2	0.44
ج	3	0.11
د	5	1.78
هـ	3	0.11
و	2	0.03
ز	3	0.25
ح	4	0.69
ط	2	0.03
ى	2	0.11

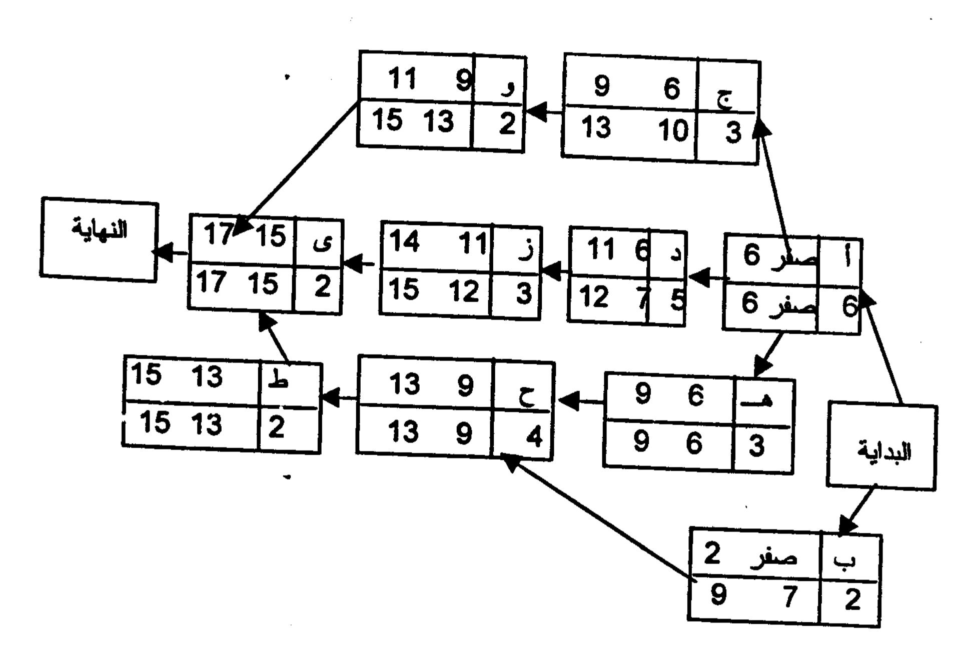
ويمكننا الآن القيام برسم شبكة المشروع باستخدام الأزمنة المتوقعة للأنشطة وذلك كما يظهر فى الشكل (6-8)

تحديد المسار الحرج :

عندما يكون لدينا الشبكة الخاصة بالمشروع وعليها الأزمنة المتوقعة للأنشطة فإننا يمكننا القيام بالعمليات الحسابية الخاصة بالمسار الحرج، والذى يعد ضروريا لتحديد الزمن المتوقع لاستكمال المشروع ككل وجدولة الانشطة. وفى هذه العمليات الحسابية فاننا نتعامل مع الأزمنة المتوقعة للأنشطة على أنها ازمنة محددة (او معروفة من حيث طولها) وبالتالى يمكننا ان نتبع نفس الاجراءات الخاصة ببيرت / المسار الحرج لتحديد المسار الحرج والتى استخدمناها فى حالة الأزمنة المعروفة او المؤكدة . وبعد القيام بتحديد الأنشطة

الحرجة ، والوقت المتوقع للانتهاء من المشروع ككل فاننا يمكننا القيام بتحليل اثر الاختلافات فى زمن الأنشطة .

شكل (6-8) : شبكة المشروع الخاص بدراسة جدول المكنسة الكهربائية المحمولة مع الأزمنة المختلفة للأنشطة .



واذا تحركنا على الشبكة من اليمين الى اليسار فاننا يمكننا حساب كل زمن البداية المبكر وزمن النهاية المبكر لكل نشاط . ويلاحظ ان زمن النهاية المبكر لآخر نشاط على الشبكة وهو النشاط (ى) قدره 17 اسبوعا ، مما يعنى ان الزمن المتوقع للمشروع ككل هو 17 اسبوعا . ثم نقوم بعد ذلك بالتحرك من يسار الشبكة الى يمينها وذلك لتحديد زمن البداية المتأخر وزمن النهاية المتأخر.

ويمكن تلخيص الأزمنة المتوقعة لكل نشاط فى الجدول (6-6) والقيام بحساب الوقت العاطل لكل نشاط ، ومن ثم تحديد المسار الحرج.

جدول (6-6) :الأنشطة والأزمنة الخاصة بمشروع دراسة جدوى تقديم المكنسة الكهربائية المحمولة.

النشاط	زمن البداية المبكر ب ك	زمن البداية المتأخر ب م	زمن النهاية المبكر ن ك	زمن النهاية المتأخر ن م	الوقت العاطل ب م– ب ك	هل النشاط يقع على المسار الحرج؟
أ	صفر	صفر	6	6	صفر	نعم
ب	صفر	7	2	9	7	–
ج	6	10	9	13	4	–
د	6	7	11	12	1	–
هـ	6	6	9	9	صفر	نعم
و	9	13	11	15	4	–
ز	11	12	14	15	1	–
ح	9	9	13	13	صفر	نعم
ط	13	13	15	15	صفر	نعم
ى	15	15	17	17	صفر	نعم

ويلاحظ من ا لجدول ان الأنشطة التى يوجد بها وقتا عاطلا مقـــداره صفر هى الأنشطة (أ -هـ – ح – ط – ى) لو تكون هذه الأنشطة واقعـــة على المسار الحرج وتسمى هى بالانشطة الحرجة .

الاختلاف فى زمن انتهاء المشروع :

حتى الآن عرفنا ان المسار الحرج لمشروع دراســة جــدوى تقديــم المكنسة الكهربائية المحمولة هو المسار (أ -هـــ – ح – ط – ى) والــذى يحقق زمنا متوقعا كليا لانتهاء المشروع قدره 17 اسبوعا . وبطبيعة الحال فان أى اختلاف فى أزمنة الأنشطة الحرجة الواقعة على المسار الحرج يمكـن أن تؤدى الى اختلاف فى زمن انتهاء المشروع ككل ، اما الاختلافات التى يمكـن ان تحدث فى أزمنة الانشطة الحرجة فهى لا تؤدى الى الاختلاف فى زمـــن

الانتهاء من المشروع نظرا لما تحويه هذه الأنشطة من أوقات عاطلة ، ولكن اذا حدث أى تأخير فى اداء أى نشاط عير حرج يزيد عن الوقت العاطل المتاح له فإن هذا النشاط يتحول ليصبح نشاطا حرجا حيث يخلق ذلك مسارا حرجا جديدا وبالتالى فقد تؤثر فى زمن انتهاء المشروع ككل . وبصفة عامة فان الاختلافات التى تؤدى الى زمن اكبر من الزمن الكلى المتوقع للأنشطة الواقعة على المسار الحرج سوف يؤدى دائما الى امتداد الزمن الكلى لانجاز المشروع. وبالعكس فان اى اختلافات فى الأزمنة تؤدى الى خلاق مسار حرج أقصر من حيث الزمن من الزمن الحالى فانها سوف تؤدى الى تخفيض زمن أقل مما هو متوقع للانتهاء من المشروع ككل ، إلا اذا اصبحت بعض الانشطة الأخرى انشطة حرجة .

دعنا الآن ننظر الى التباين الخاص بالانشطة الحرجة والواقعة على المسار الحرج لكى نحدد ذلك الحجم من التباين فى الزمن الكلى اللازم لانجاز المشروع فى مثالنا .

دعنا نركز للزمن الكلى لانجاز المشروع بالرمز (ز ك) فى مثالنا نجد ان القيمة المتوقعة لهذا الزمن هو مجموع الزمن المتوقع لأنشطة المسار الحرج وهو وفقا للجدول (6 – 5)

ز ك = ز ا + زهـ + زح + ز ط + زى

= 6 +3 +4 +2 + 2 = 17 اسبوعا

وبنفس المنطق فان التباين الخاص بالزمن الكلى لانجاز المشروع هو مجموع التباين الخاص بالأنشطة الواقعة على المسار الحرج (الانشطة الحرجة) وهو :

التباين (ن)= تباين (أ) + تباين(هـ) + تباين(ح)+ تباين(ط) +تباين (ى)

ويمكننا الحصول على هذه الأرقام من الجدول(6 –5) ايضا وهى كالتالى:

التباين الكلى : 1.78 + 0.11 + 0.69 + 0.03 + 0.11 = 2.72

والواقع ان معادلة التباين تقدم على افتراض اساسى ألا وهو أن أزمنة الأنشطة مستقلة عن بعضها البعض ، أما اذا كانت الأزمنة غير مستقلة (اى هناك درجة من الاعتمادية فيها) فان هذه المعادلة تقدم لنا حجما تقريبياً للتباين فى الزمن الكلى للمشروع . والواقع ان جودة هذا التقريب يتوقف على درجة قرب الأزمنة من فكرة عدم الاعتمادية او الاستقلال .

وبصرف النظر عن ذلك ، فإن معرفة التباين يمكننا من حساب الانحراف المعيارى وذلك عن طريق وضع هذا التباين تحت الجذر التربيعى ، وفى مثالنا فان الانحراف المعيارى لزمن الانتهاء من المشروع هو:

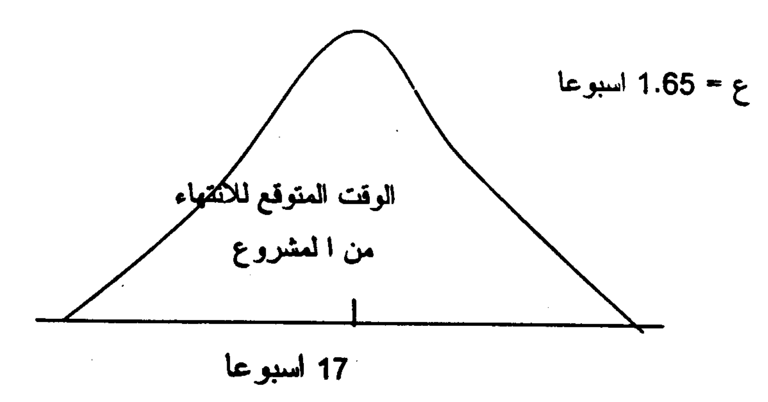
$$ع = \sqrt{ن}$$

$$= \sqrt{2.72}$$

$$= 1.65$$

فاذا افترضنا ان توزيع الزمن الكلى لانجاز المشروع (ز ك) هو توزيع يأخذ شكل التوزيع الطبيعى كما يظهر فى الشكل (6 –9) ، فاننا مع هذا النوع من التوزيع يمكننا حساب احتمالات استكمال المشروع فى أوقات محددة . فعلى سبيل المثال لو أن الإدارة قد خصصت 20 اسبوعا للانتهاء من هذا المشروع ، فما هى احتمالات انها سوف تستطيع تخفيض ذلك ؟

شكل (6-9) : التوزيع الطبيعى لزمن الانتهاء من مشروع دراسة جدوى تقديم مكنسة كهربائية محمولة



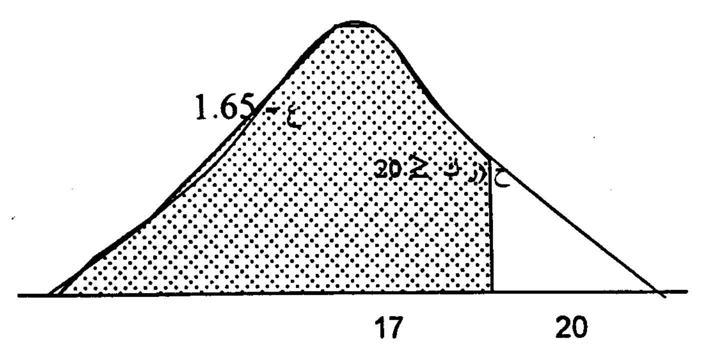
وباستخدام التوزيع الاحتمالى الطبيعى والذى يظهر فى الشكل (6-10) فاننا نسأل عن احتمالات ان تكون (ز ك) ≥ 20 اسبوعا ، وهذه الاحتمالات تتضح بيانيا فى المساحة المظللة تحت المنحى الذى يظهر فى الشكل (6-10) ويمكننا حساب قيمة z للتوزيع الطبيعى عند (ز ك) = 20 كالتالى :

$$Z = \frac{17 - 20}{1.65} = 1.82$$

عند (ز ك) = 20

$$z = \frac{17 - 20}{1.65} = 1.82$$

شكل (6–10) : احتمالات انجاز المشروع قبل الموعد المحدد من قبل الادارة وهو 20 اسبوعا



وباستخدام قيمة Z =1.82 ، والجدول الزمنـــى الخـــاص بـــالتوزيع الطبيعى والذى يظهر فى المحلق الخاص بالكتاب يمكننا أن نجد أن احتمـــالات انجاز المشروع فى الوقت المحدد له من قبل الادارة وهو 20 اسبوع هى :

$$0.9656 = 0.5000 + 0.4656$$

ومن هنا فإنه على الرغم من أن الاختلافات فى أزمنة الانشطة قد تؤدى الـــى زيادة الوقت المتوقع لانجاز المشروع من 17 اسبوعا الا أن هنـــاك فرصـــة ممتازة قدرها 96.56 % لانجاز المشروع قبل الوقت المحدد لـــــه مـــن قبـــل الادارة وهو 20 اسبوعاً .وبطبيعة الحال يمكننا حساب الاحتمالات الخاصـــــة بانجاز المشروع فى أزمنة أخرى بديلة بنفس الطريقة السابقة .

أخذ عملية المقايضة بين الزمن والتكلفة فى الاعتبار :

إن اسلوب المسار الحرج يوفر لمدير المشـــروع احـــد الاختيـــارات الخاصة باضافة بعض الموارد لبعض الأنشطة المختارة وذلك بفرض تخفيض الزمن الكلى اللازم لانجاز المشروع ، وتؤدى عملية زيادة المـــوارد (عـــن طريق اضافة عدد اكبر من العاملين) أو جعل العمالة المتوفرة تعمـــل وقـــت اضافى ... الخ) الى زيادة التكلفة ، ومن هنا فـــإن قـــرار تخفيـــض زمـــن

المشروع لابد وان يأخذ فى حسبانه تكلفة القيام بذلك . ومن ثم فان قرار مدير المشروع يتضمن نوعا من المقايضة بين زمن المشروع والتكلفة .

دعنا نأخذ مثالا لنوضح هذه المقايضة ، بفرض ان هنـــاك مشـــروع لصيانة آلتين والذى يتكون من خمس خطوات . وحيث أن الادارة لديها خبرة سابقة فى هذا المجال نتيجة تكرار اعمال الصيانة فان الزمن الخـــاص بكل نشاط يعد زمنا مؤكدا ، ومن هنا فان تقدير بزمن واحد ومحدد قـــد اعطتـــه الادارة لكل نشاط كما يظهر فى الجدول (6-7)

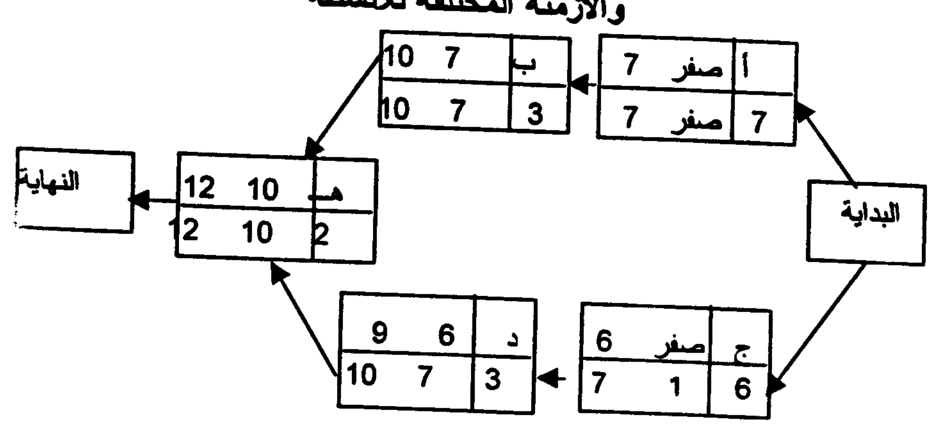
جدول (6-7) : قائمة الأنشطة الخاصة بمشروع صيانة آلتين :

النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق مباشرة	الوقت المتوقـــع بالأيام
أ	القيام بالإصلاح الشامل للآلة الاولى	-	7
ب	عملية ضبط الآلة الاولى بعد الاصلاح	أ	3
جـ	القيام بالاصلاح الشامل للآله الثانية	-	6
د	القيام بضبط الآلة الثانية بعد الاصلاح	ج	3
هـ	اختبار نظام الانتاج بعد اصلاح الآلتين	ب د	2

ويمكن رسم شبكة المشروع وتحديد الأزمنة المختلفة كما تظهر فـــى الشكل (6-11)

شكل (6-11) : شبكة مشروع صيانة آلتين

والأزمنة المختلفة للانشطة



ويمكن وضع الأزمنه المختلفة للأنشطة فى جدول وذلك لتحديد الزمـن العاطل وكذلك المسار الحرج للمشروع كما يظهر فى الجدول (6-8) .

جدول (6-8) الأزمنة المختلفة لمشروع صيانة آلتين

النشاط	زمن البداية المبكر ب ك	زمن البداية المتأخر ب م	زمن النهاية المبكر ن ك	زمن النهاية المتأخر ن م	الوقت العاطل ب م- ب ك	هل النشاط يقع على المسار الحرج؟
أ	صفر	صفر	7	7	صفر	نعم
ب	7	7	10	10	صفر	نعم
ج	صفر	1	6	7	1	-
د	6	7	9	10	1	-
هـ	10	10	12	12	صفر	نعم

وبالنظر الى الجدول (6-8) نجد أن الأنشطة التى تحتوى على صفر زمن عاطل هى الأنشطة أ ، ب ، هـ وبالتالى فان المسار الحرج هـو أ ، ب ، هـ وطول زمنه 12 يوما ، ومن ثم فان مشروع صيانة الآلتين يمكـن ان ينجز فى 12 يوما .

تخفيض أزمنة الانشطة Crashing Activity

بفرض ان مستوى الانتاج الحالى يجعل من الضـرورى أن ينتـهى مشروع صيانة الآلتين فى 10 ايام فقط . بالنظر الى طول المسـار الحـرج للمشروع سنجد أنه 12 يوما وانه من المستحيل ان ننجزه فى 10 ايام فقـط إلا اذا استطعنا أن نخفض أزمنة بعض الأنشطة المختارة ، وتسمى عملية تقصير الزمن الخاص ببعض الأنشطة من خلال إضافة بعض الموارد باسم تخفيـض الزمن Crashing . وكما ذكرنا من قبل فـإن المـوارد الاضافيـة اللازمـة لتخفيض أزمنة بعض الانشطة تؤدى الى زيادة التكلفة الخاصة بالمشـروع . ومن هنا فان علينا ان نحدد تلك الأنشطة التى يمكن تخفيض وقتها عند أقـل

تكلفة ، ثم بعد ذلك تقوم بتخفيض أزمنتها بحيث تستطيع انجاز المشروع فــى الوقت المستهدف من قبـــــل الادارة (10 ايام) ، لاحظ ان تخفيض زمـــن المشروع بشكل اكبر مما هو مطلوب ســـوف يـؤدى الـــى زيـــادة التكلفـــة دون داعى.

ولكى نحدد أين يمكن تخفيض الزمن ، وبأى قدر يتم هذا التخفيـــض فاننا نحتاج الى معلومات عن المدى الزمنى الذى يمكن تخفيضه لكل نشـــاط ، وكذلك عن التكلفة الخاصة بكل تخفيض ، ولذا فإن مدير المشروع لابـــد وأن يسأل عن المعلومات التالية :

1- التكلفة المتوقعة لأداء النشاط وذلك فى ظل انجازه فى وقته العادى أو ما يسمى بالزمن المتوقع للنشاط.
2- الزمن المقدر لانجاز النشاط فى ظل اكبر قدر ممكن من التخفيـض (أى أقل وقت ممكن لانجاز النشاط).
3- التكلفة المتوقعة لانجاز النشاط فى ظل اقل وقت ممكن لانجازه.

دعنا نعطى الرموز التالية:

$ز_ن$ = الزمن المتوقع للنشاط $ط_ن$

$ض_ن$ = الزمن الخاص بالنشاط ن فى ظل اكبر قدر من التخفيض .

$ق_ن$ = اكبر قدر من الوقت يمكن تخفيضه لاداء النشاط ن .

وبمعلومية كل من $ز_ن$ ، $ض_ن$ يمكن حساب قيمة $ق_ن$ كالتالى :

$ق_ن = ز_ن - ض_ن$

كذلك يمكن إعطاء تكلفة اداء النشاط فى وقته العادى الرمز (ت ع) ، والرمز (ت ض) لتكلفة اداء النشاط فى ظل أقل وقت يمكن فيـــه انجـــازه وبالتالى فان تكلفة تخفيض الوحدة من الزمن (ت ض و) لأى نشاط يمكـــن حسابه كالتالى :

$$ت ض و_{ن} = \frac{ت ض_{ن} - ت ع_{ن}}{ق_{ن}}$$

فعلى سبيل المثال ، لو أن الوقت الخاص بأداء النشاط (أ) هى 7 أيام وذلك عند تكلفة قدرها 500 جنيه ، وزمن اداء هذا النشاط عند أقصى درجة من تخفيضه هو 4 ايام وذلك عند تكلفة قدرها 800 جنيه فاننا يمكننا تطبيق المعادلات السابقة كما يلى :

$ز_{١} = 7$ ايام ، $ض_{١} = 4$ ايام

$\therefore$ $ق_{١} = 7 - 4 = 3$ أيام

$\because$ $ت ع_{١} = 500$ جنيها

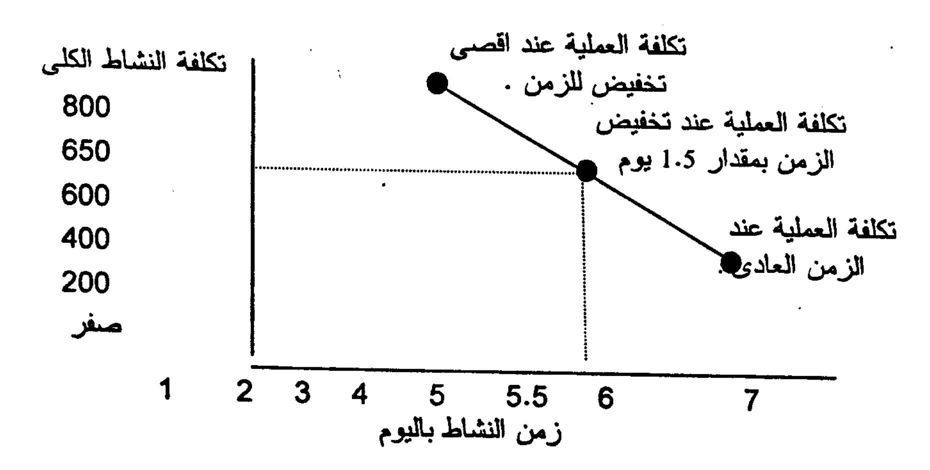
$ت ض_{١} = 800$ جنيها

فان $ت ض و_{١} = \frac{800 - 500}{3} = 100$ جنيه لليوم.

وسوف نقوم بوضع افتراض اساسى ألا وهو أن اى جزء أو كسر من الزمن المخفض لأى نشاط يمكن انجازه بكسر أز جزء مماثل فى تكلفة تخفيض زمن النشاط . فمثلا إذا قررنا تخفيض زمن النشاط (أ) بمقدار 1.5 يوما فقط فان التكلفة الاضافية سوف تزيد ايضا بمقدار 1.5 (100) = 150 جنيها ، ومعنى ذلك ان التكلفة الاجمالية بعد هذا القدر من التخفيض فى زمن النشاط (أ) تساوى 500 + 150 = 650 جنيها .

ويوضح الشكل (6-12) تلك العلاقة البيانية بين الزمن والتكلفة وذلك للنشاط (أ) .

شكل (6-12) العلاقة بين الزمن والتكلفة بالنسبة للنقاط (أ)



ويعبر الجدول(6-9) عن البيانات الخاصة بالأزمنـــة العاديـــة والمخفضـــة وتكلفتها بالنسبة لأنشطة المشروع الخاص بالصيانة للآلتين.

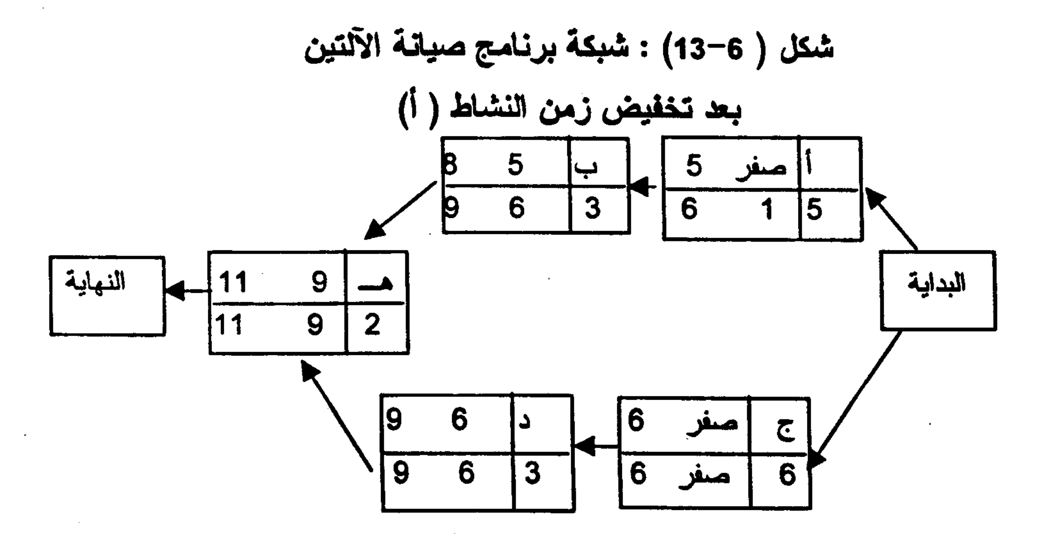
جدول (6-9) : الوقت العادى والمخفض وتكلفتهما بالنسبة لمشروع صيانة الآلتين

النشاط	الزمن		التكلفة الكلية		اقصى قيمة لتخفيض زمن النشاط	تكلفة التخفيض باليوم
	العادى	المخفض	العادية	المخفض الزمن		
أ	7	4	500	800	3	100
ب	3	2	200	350	1	150
ج	6	4	500	900	2	200
د	3	1	200	500	2	150
هـ	2	1	300	550	1	250
			1700	3100		

والسؤال الذى قد يطرح نفسه الآن هو أى الأنشطة يجب تخفيض زمنها وبأى قدر حتى يمكن للمشروع أن ينتهى فى 10 أيام وذلك عند أقل تكلفة ممكنة ؟ الطبيعى أن ننظر الى الأنشطة الحرجة وهى تلك التى تقع على المسار الحرج أ ، ب ، هـ ، اذا نظرنا الى النشاط (أ) نجد أن التخفيض يتحقق عند أقل تكلفة لليوم مقارنة بالأنشطة (ب) ، (هـ) . وبالتالى فان تخفيض زمن هذا النشاط بمقدار 2 ساعة سوف يؤدى الى انجاز المشروع فى 10 أيام عند أقل تكلفة . ولكن الأمر ليس بهذه البساطة ، لماذا ؟ لأن تخفيض زمن أى نشاط قد يؤدى الى ظهور مسار حرج جديد. ومن هنا فاننا نريد بعد أجراء التخفيض أن نتحقق من المسار الحرج بعد تعديل زمن النشاط (أ) وهنا ربما نحتاج الى القيام بتخفيض بعض الأنشطة الأخرى أو تعديل قرارنا الخاص بتخفيض النشاط (أ) . دعنا نختبر المسار بعد تخفيض النشاط (أ) . الشكل (6-13) يعبر عن ذلك .

شكل (6-13) : شبكة برنامج صيانة الآلتين

بعد تخفيض زمن النشاط (أ)



ويمكن تلخيص الأزمنة المختلفة للانشطة الخاصة بالمشروع ، وتحديد الزمن العاطل والمسار الحرج فى الجدول (6-10) .

جدول (6-10) : الأزمنة المختلفة لمشروع صيانة الآلتين بعد تخفيض زمن النشاط (أ)

النشاط	زمن البداية المبكر ب ك	زمن البداية المتأخر ب م	زمن النهاية المبكر ن ك	زمن النهاية المتأخر ن م	الزمن العاطل ب م – ب ك	هل النشاط يقع على المسار الحرج ؟
أ	0	1	5	6	1	–
ب	5	6	8	9	1	–
ج	0	0	6	6	0	نعم
د	6	6	9	9	0	نعم
هـ	9	9	11	11	0	نعم

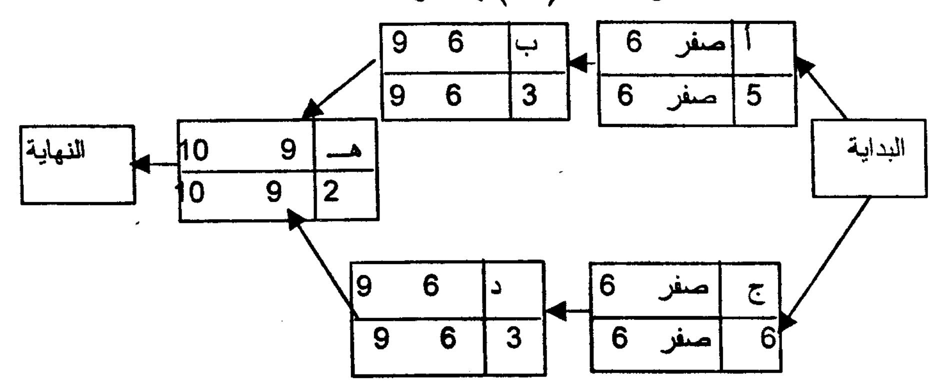
ويلاحظ أن تخفيض زمن النشاط (أ) بمقدار ساعتين قد أدى الى ظهور مسار حرج جديد وهو المسار ج – د هـ وزمنه 11 اسبوعا ، ويعنى ذلك أمرين :

(1) أنه على الرغم من تخفيض زمن النشاط (أ) بمقدار ساعتين إلا ان ذلك لم يؤد الى انجاز المشروع ككل فى 10 أيام وفقا لرغبة الادارة

(2) أننا لو أردنا أن نصل الى انجاز المشروع فى زمن قدرة 10 أيام فلابد من قرار بتخفيض النشاط (أ) والقيام بتخفيض نشاط حرج آخر الى جواره .

والسؤال الذى يطرح نفسه ، ما هو البديل الآخر الذى يحقق لنا الهدف (تخفيض زمن المشروع كلل الى 10 أيام) وذلك عند نفس التكلفة ؟ الاجابة دعنا نخفض زمن النشاط (أ) بمقدار ساعة واحدة ، وكذلك النشاط (هـ) بمقدار ساعة فهل يحقق ذلك الهدف ؟ ويوضح الشكل(6-14) شبكة الأعمال للأنشطة بعد التخفيض المقترح ، كما يظهر الجدول (6-11) الأزمنه المختلفة والمسار الحرج .

شكل(6-14) : شبكة برنامج صيانة الآلتين بعد تخفيض النشاط (أ) بمقدار ساعة والنشاط (هـ) بمقدار ساعة



جدول (6-11) : أزمنة الأنشطة لمشروع صيانة الآلتين بعد تخفيض زمن (أ) بمقدار ساعة وزمن (هـ) بمقدار ساعة

النشاط	زمن البداية المبكر ب ك	زمن البداية المتأخر ب م	زمن النهاية المبكر ن ك	زمن النهاية المتأخر ن م	الزمن العاطل ب م – ب ك	هل النشاط يقع على المسار الحرج ؟
أ	0	0	6	6	0	نعم
ب	6	6	9	9	0	نعم
ج	0	0	6	6	0	نعم
هـ	9	9	10	10	0	نعم

ويلاحظ من الجدول (6-12) : أن الشركة قد حققت الهدف وهو تخفيض زمن الانتهاء من المشروع ككل فى 10 أيام فقط بدلا من 12 يوما وذلك عن طريق تخفيض ساعة فى الزمن (أ) وساعة فى الزمن (هـ).وتبلغ تكلفة هذا التخفيض:1(100) + 1 (250) = 350 وهى أقل تكلفة تؤدى الى تخفيض الزمن الكلى للمشروع .

والواقع أن عملية تخفيض أزمنة بعض الأنشطة ومقايضتها بالتكلفة المترتبة على ذلك ينتج عملية معقدة فى ظل شبكات برنامج تحتوى على عدد

كبير من الأنشطة . ومن هنا فان تحديد القرار الأمثل لتخفيض الزمن يمكن أن يحقق من خلال استخدام اسلوب البرمجة الخطية.

استخدام أسلوب البرمجة الخطية لتخفيض الزمن :

عند استخدام أسلوب بيرت / المسار الحرج فقد عرفنا أن :

زمن النهاية المبكر (ب ك) =

زمن البداية المبكر (ب ك) + زمن النشاط ط(ز)

واذا نظرنا الى زمن البداية المبكـــر (ب ك) ووجدنـــاه معروفـــا ومحددا فان التأثير تخفيض زمن النشاط سوف ينســـحب علـــى قيمـــة (ز) وبالتالى سوفى يخفض زمن النهاية المبكر وبالتالى يمكننا اســتخدام أســلوب البرمجة الخطية لكى نحدد ما هى الأنشطة التى يجب تخفيض زمنها ، وبـــأى مقدار ينبغى تخفيض هذا الزمن .

دعنا ننظر الى النشاط (أ) والذى يمكن انجازه فى الزمـــن العـــادى وهو 7 أيام . فإذا رمزنا الى زمن النهاية المبكر للنشاط (أ) بـــالرمز س ١ ، ورمزنا الى مقدار الزمن الذى يمكن تخفيضه فى النشاط (أ) بـالرمز ص ١ . ولو أننا افترضنا أن المشروع سوف يبدأ عند الزمن صفر فإن زمن البدايـــة المبكر للنشاط (أ) هو صفر . وحيث أن الزمن الخـــاص بالنشـــاط (أ) تـــم تخفيضه بمقدار الزمن الذى يخفض من أدائه فان زمن النهاية المبكر للنشاط (أ) يصبح :

س١ ≤ صفر + (7 – س ١)

فإذا قمنا بتحريك (ص أ) الى يمين المعادلة فانها تصبح :

س ١ + ص١ ≤ 7

وبصفة عامة ، إذا جعلنا :

س ن = زمن النهاية المبكر للنشاط ن ، حيث ن = أ ، ب ، ج ، د ، هـ

صن= مقدار الزمن المخفض فى النشاط ن ،حيث ن= أ ،ب ،ج ،د ، هـ

واذا استخدمنا نفس المنطق الذى استخدمناه لحساب زمن النهاية المبكر للنشاط (أ) وذلك مع النشاط (ج) { حيث ان زمن البداية المبكر لهذا النشاط = صفر ايضا } فإن :

$$س_{ج} \geq صفر + (6 - ص_{ج})$$

أو : $س_{ج} + ص_{ج} \geq 6$

أما بالنسبة للنشاط (ب) فان زمن البداية المبكر له هو ($س_{ا}$) والذى يعتبر زمن النهاية المبكر للنشاط (أ) . ومن هنا فان القيد الخاص بزمن النهاية المبكر للنشاط (ب) سوف يصبح كما يلى :

$$س_{ب} \geq س_{ا} + (3 - ص_{ب})$$

أو : $س_{ب} + ص_{ب} - س_{ا} \geq 13$

وبالمثل فاننا يمكننا صياغة القيد الخاص بزمن الانتهاء المبكر للنشاط (د) كالتالى :

$$س_{د} \geq س_{ج} + (3 - ص_{د})$$

أو : $س_{د} + ص_{د} - س_{ج} \geq 3$

واخيرا فاننا ننظر الى النشاط (هـ) . أن زمن البداية المبكر للنشاط (هـ) يساوى أكبر قيمة لزمنى النهاية المبكر للنشاطين (ب) ، (د). ولأن أزمنة النهاية المبكرة لكل من النشاطين (ب) ، (د) سوف يتحدد بعد اجراء عملية تخفيض الزمن ، فلا بد لنا أن نكتب قيدين للنشاط (هـ) ، الأول اساسه هو زمن النهاية المبكر للنشاط (ب) والثانى فى أساسه زمن النهاية المبكر للنشاط (د) .

$$س_{هـ} + ص_{هـ} - س_{ب} \geq 2$$

أو : $س_{هـ} + ص_{هـ} - س_{د} \geq 2$

فإذا ما تذكرنا أن مستوى الإنتاج الحالى قد جعل من الضرورى الانتهاء من مشروع صيانة الآلتين فى 10 أيام ، ولذا فإن القيد الخاص بزمن النهاية المبكر للنشاط (هـ) لابد وان يكون 10 أيام أو اقل كالتالى :

س هـ ≤ 10

وبالاضافة الى هذه القيود فلابد من إضافة 5 قيود أخرى تحدد أقصى قدر من الزمن الذى يمكن تخفيضه فى كل نشاط كالتالى :

ص ا ≤ 3

ص ب ≤ 1

ص ج ≤ 2

ص د ≤ 2

ص هـ ≤ 1

ويلاحظ ان هذه الأرقام الموجودة على اليسار بمقدار تخفيض الوقت قد تم الحصول عليها من الجدول (6-9) وذلك أسفل عمود أقصى قيمة لتخفيض زمن النشاط .

وكالمعتاد مع نماذج البرمجة الخطية فإننا نضيف متطلبات عدم الحصول على قيم سالبة للمتغيرات الخاصة بالقرار ، أى أن :

س ا ، س ب ، س ج، س د ، س هـ ، ص أ ، ص ب ، ص ج ، ص د ، ص هـ ≤ صفر

كل ما تبقى الآن هو كتابة دالة الهدف للنموذج . وحيث أن التكلفة الاجمالية لانجاز المشروع ككل فى الأزمنة العادية للأنشطة هى 1700 جنيه (انظر جدول 6 – 9) ، فإننا يمكن ان ندنى من تكلفة المشروع ككل (تكلفة الوقت العادى + تكلفة تخفيض الأزمنة) وذلك عن طريق تخفيض تكلفة تقلل الزمن ككل (تكلفة الوقت العادى + تكلفة تخفيض الأزمنة) وذلك عن طريق

تخفيض تكلفة تقليل الزمن عند أدنى حد ممكن . ومن هنا فإن دالـــة الـــهدف لنموذج البرمجة الخطية تصبح كما يلى :

تدنيه:100 ص ا +150 ص ب +200 ص ج +150 ص د +250 ص هـ

ويمكننا كتابة نموذج البرمجة الخطية لتخفيض زمن المشروع عند أقل تكلفة ممكنة كما يلى :

تدنيه:100 ص ا +150 ص ب +200 ص ج +150 ص د +250 ص هـ

فى ظل :

س ا + ص ا	≤	7	... (1)
س ب + ص ب − س ا	≤	3	... (2)
س ج + ص ج	≤	6	... (3)
س د + ص د − س ج	≤	3	... (4)
س هـ + ص هـ − س ب	≤	2	... (5)
س هـ + ص هـ − س د	≤	2	... (6)
س هـ	≤	10	... (7)
س ا	≤	3	... (8)
س ب	≤	1	... (9)
س ج	≤	2	... (10)
س د	≤	2	... (11)
ص هـ	≤	1	... (12)

شروط عد السلبية :

س ا ، س ب ، س ج، س د ، س هـ، ص أ ، ص ب ، ص ج ، ص د ، ص هـ ≤ صفر

ويمكن استخدام طريقة السيملكس (باستخدام الحاسب) لحل نمـــوذج البرمجة الخطية والمكون من 10 متغيرات (س ن ، ص ن) ، واثنى عشـــو

تمرينات الفصل السادس

1- يقوم أحد متاجر التوزيع بإعداد برنامج تدريبي للعاملين لديــــه. وترغــب الشركة في تصميم برنامج بحيث يستطيع المتدربين أن ينتهوا منه في أقل وقت ممكن. ويكلف المتدرب بعدد من المهام التدريبية أثنـــاء التدريـــب. ويعبر الجدول التالي عن تلك المهام والمهام السابقة عليها.

المهام	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح
المهام السابقة مباشرة	-	-	أ	أ،ب	أ،ب	ج	د،و	هـ،ز

قم برسم شبكة هذا البرنامج التدريبي.

2- فيما يلي أنشطة أحد المشروعات، والأنشطة السابقة عليها مباشرة، وزمــن أداء كل نشاط.

النشاط	النشاط السابق مباشرة	الزمن (بالشهر)
أ	--	4
ب	--	6
ج	أ	2
د	أ	6
هـ	ب ، ج	3
و	ب ، ج	3
ز	د ، هـ	5

والمطلوب:

أ) رسم شبكة هذا المشروع.

ب) القيام بتحديد المسار الحرج.

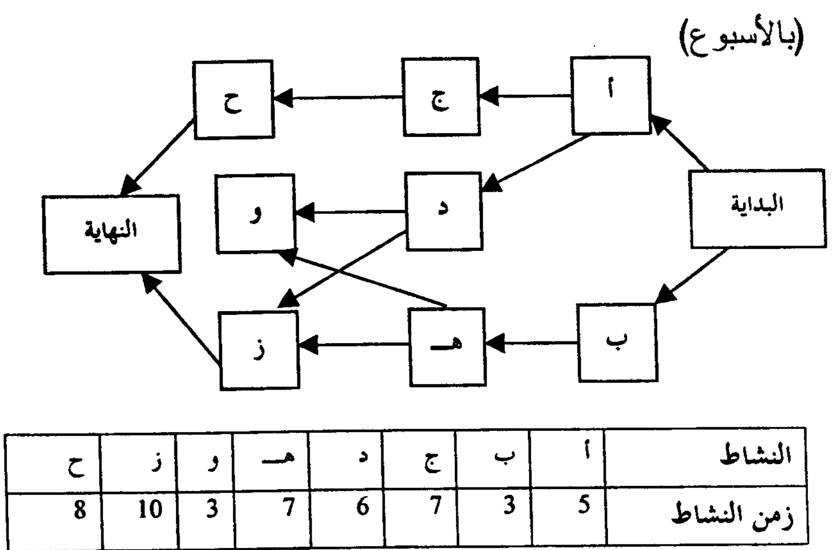
ج) إذا كان هذا المشروع لابد وأن ينتهي في 1.5 سنة. هل تعتقد أن هناك أي صعوبة في تحقيق ذلك؟ ولماذا؟

3- تتخصص شركة الفجر الجديد في إعداد وتنمية نظم تدعيم القرارات. وقد تلقت الشركة عقداً لتنمية نظام حاسب يساعد الإدارة في إحدى الشركات الكبرى في تكوين خطتها الخاصة بالاتفاق الرأسمالي. وقد قام قائد فريق العمل بشركة الفجر الجديد بتنمية قائمة من الأنشطة الخاصة بالمشروع، وكذلك الأنشطة السابقة عليها مباشرة.

النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ى
النشاط السابق مباشرة	-	-	-	ب	أ	ب	ج،د	ب،هـ	و،ز	ح

قم برسم الأعمال لهذا المشروع.

4- باستخدام شبكة الأعمال التالية، وزمن الانتهاء من كل نشاط فيه (بالأسبوع)



النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح
زمن النشاط	5	3	7	6	7	3	10	8

المطلوب:

أ) قم بتحديد المسار الحرج لهذا المشروع.

ب) كم يستغرق الانتهاء من هذا المشروع؟

ج) هل يمكن القيام بتأخير النشاط بدون تأخير المشروع ككل؟ إذا كان ذلك ممكناً بأي عدد من الأسابيع يمكن تأخير هذا النشاط؟

د) ما هي الأزمنة المختلفة للنشاط (هـ)؟

5- يتكون مشروع تركيب نظام جديد للحاسب في إحدى الشركات من 8 أنشطة. الأنشطة السابقة والزمن الخاص بكل نشاط (بالأسبوع) يوضحها الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق عليه مباشرة	الزمن
أ	--	3
ب	--	6
ج	أ	2
د	ب ، ج	5
هـ	د	4
و	هـ	3
ز	ب ، ج	9
ح	و ، ز	3

المطلوب:

أ) قم برسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟

ب) ما هي الأنشطة الواقعة على المسار الحرج؟

ج) ما هو الوقت المتوقع للانتهاء من هذا المشروع؟

6- تفكر إحدى الجامعات في بناء مبنى رياضي يحتوي على عدة ألعاب رياضية. ويتطلب الإعداد للبدء في بناء هذا المبنى الجديد القيام بعدة أنشطة والتي تظهر في الجدول التالي هي والأنشطة السابقة عليها مباشرة وزمن كل نشاط:

النشاط	الوصف	الأنشطة السابقة مباشرة	الزمن (بالأسبوع)
أ	القيام بمسح الأرض التي سيبنى عليها المبنى	-	6
ب	إعداد تصميم مبدئي للمبنى	--	8
ج	الحصول على موافقة مجلس الجامعة	أ،ج	12
د	القيام باختيار مهندس للإشراف على المشروع	ج	4
هـ	وضع الميزانية	ج	6
و	وضع التصميم النهائي للمبنى	د،هـ	15
ز	الحصول على التمويل اللازم للبناء	هـ	12
ح	اختيار شركة مقاولات لأعمال البناء	و،ز	8

والمطلوب:

) القيام برسم شبكة المشروع.

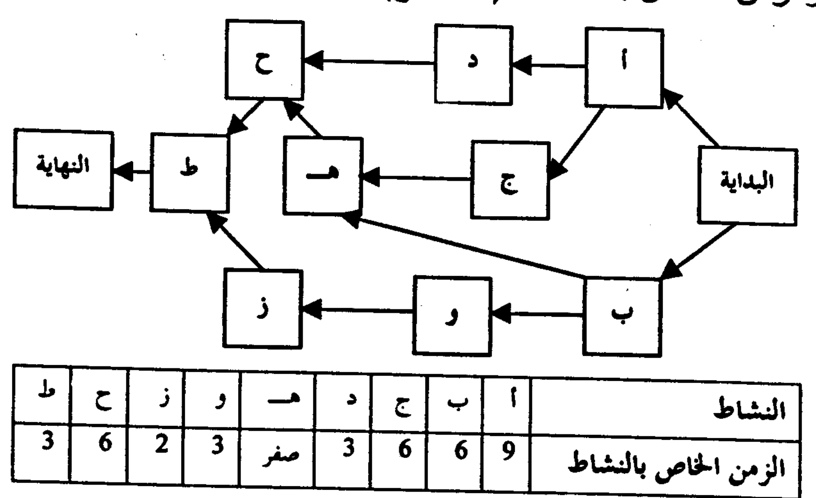
ـ) قم بتحديد المسار الحرج للمشروع.

ج) قم بتنمية الأنشطة المختلفة لكل الأنشطة في المشروع.

) ما هو الوقت المقدر للإنتهاء من هذا المشروع؟

ـ) حدد ما هي الأنشطة التي توجد بها وقت فائض؟ وما مقدار الفائض في كل منها؟

7- تفكر محافظة الإسكندرية في إنشاء حديقة ومنتزه جديد على قطعـــة أر
مساحتها 100 فدان في شمال المدينة، وتعبر الشبكة التالية عــن الأنشــ
والزمن الخاص بكل نشاط (بالأسابيع).



النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
الزمن الخاص بالنشاط	9	6	6	3	صفر	3	2	6	3

المطلوب:

ا) ما هو المسار الحرج لهذه الأنشطة؟

ب) ما هي الأزمنة المختلفة لكل نشاط من هذه الأنشطة؟

ج) إذا فكرت المحافظة في افتتاح هذه الحديقة الجديدة خلال 6 شهور م
بداية المشروع فهل يمكن ذلك؟ ولماذا؟

8- إذا كان تقدير الزمن الخاص بالأنشطة التاليــة كمــا يلــي وذلــك لأحـ
المشروعات الصغيرة.

النشاط	المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم
أ	4	5	6
ب	8	9	10
ج	7	7.5	11
د	7	9	10
هـ	6	7	9
و	5	6	7

المطلوب:

أ) قم بحساب الزمن المتوقع للانتهاء من كل نشاط وكذلك التباين الخـاص بهذا التقدير للزمن المتوقع.

ب) إذا قام أحد الخبراء بذكر المسار الحرج يتضمن الأنشطة ب-د-و. قم بحساب زمن الإنتهاء من المشروع، والتباين الخاص بهذا الزمن.

9- يتكون بناء حمام سباحة في إحدى القرى السياحية من 9 أنشطة. الأنشـطة، والأنشطة السابقة عليها مباشرة تظهر في الجدول التالي:

النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
النشاط السابق مباشرة	-	-	أ،ج	أ،ب	ب	ج	د	د،و	هـ،ز، ح

المطلوب: القيام برسم شبكة الأعمال للمشروع.

10- بفرض أن الزمن المقدر (بالأيام) للأنشطة الخاصة ببناء حمام سباحة فـي التمرين (9) كان كما يلي:

النشاط	الزمن المتفائل	الزمن الأكثر احتمالاً	الزمن المتشائم
أ	3	5	6
ب	2	4	6
ج	5	6	7
د	7	9	10
هـ	2	4	6
و	1	2	3
ز	5	8	10
ح	6	8	10
ط	3	4	5

المطلوب:

أ) ما هي الأنشطة الواقعة على المسار الحرج؟

ب) ما هو الوقت المتوقع للانتهاء من هذا المشروع؟

ج) ما هو احتمال أن تنتهي من بناء هذا الحمام في 25 يوم أو أقل؟

11- بفرض أن الأزمنة المقدرة (بالأسابيع) للأنشطة الخاصـــة بالشـــبكة فـــي التمرين رقم (4) كانت كما يلي:

النشاط	الزمن المتفائل	الزمن الأكثر احتمالاً	الزمن المتشائم
أ	4	5	6
ب	2.5	3	3.5
ج	6	7	8
د	5	5.5	9
هـ	5	7	9
و	2	3	4
ز	8	10	12
ح	6	7	14

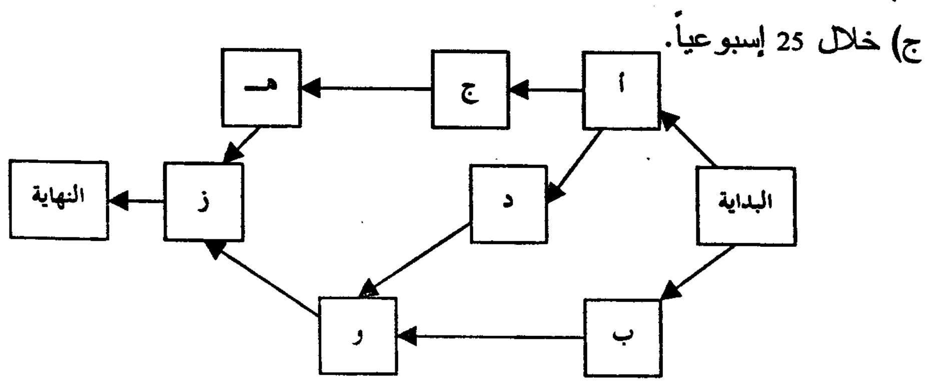
المطلوب:

تحديد الاحتمالات الخاصة بالإنتهاء من هذا المشروع في:

أ) خلال 21 أسبوعياً.

ب) خلال 22 إسبوعيا.

ج) خلال 25 إسبوعياً.



فإذا كان الزمن المقدر (بالأيام) لهذه الأنشطة كما يلي:

النشاط	الزمن المتفائل	الزمن الأكثر احتمالاً	الزمن المتشائم
أ	5	6	7
ب	5	12	13
ج	6	8	10
د	4	10	10
هـ	5	6	13
و	7	7	10
ز	4	7	10

المطلوب :

أ) قم بتحديد المسار الحرج للمشروع.

ب) ما هو مقدار الزمن العاطل- إذا وجد- في النشاط ج؟

ج) قم بتحديد الزمن المتوقع للانتهاء من هذا المشروع ؟ وقيمة التباين لهذا الزمن؟

د) قم بتحديد الاحتمال الخاص بالانتهاء من هذا المشروع في 30 يوم أو أقل.

13- يتولى السيد عمر شاهين تنسيق وتخطيط مشروع برنامج التدريب الخاص برجال البيع بالشركة، وقد قام السيد عمر بإعداد الأنشطة التالية لهذا البرنامج.

النشاط	الأنشطة السابقة عليها مباشرة	الزمن (بالأسابيع)		
		المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم
أ	-	1.5	2	2.5
ب	أ	2	2.5	6
ج	-	1	2	3
د	ج	1.5	2	2.5
هـ	ب،د	0.5	1	1.5
و	هـ	1	2	3
ز	ب،د	3	3.5	7
ح	ز	3	4	5
ط	و،ح	1.5	2	2.5

المطلوب:

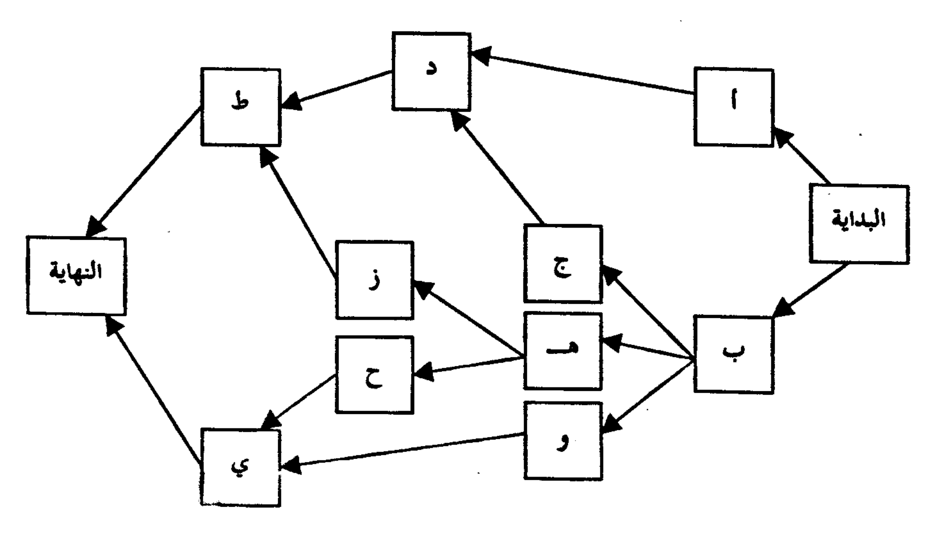
أ) قم برسم شبكة المشروع.

ب) قم بتحديد كافة الأزمنة المختلفة للأنشطة.

ج) ما هي الأنشطة الحرجة (الواقعة على المسار الحرج)؟ وما هو الزمن المتوقع للانتهاء من هذا المشروع؟

د) لو أن السيد عمر يرغب في أن يكمل المشروع في الموعد المحدد باحتمال قدره 0.99 كم من الوقت عليه أن يبدأ مبكراً عن الوقت المحدد لبدء المشروع؟

14- يعمل فريق تطوير وتنمية المنتجات الجديد بإحدى الشركات على تنمية برنامج جديد للحاسب الآلي والذي يتوقع له أن يحصل على حصة كبيرة من السوق. وباستخدام بعض أساليب التجسس الصناعي علمت إدارة الشركة أن المنافس لها في السوق سوف يقدم برنامج مشابه لهذا البرنامج الجديد. ولذا فقد وضعت إدارة الشركة الضغط على فريق تطوير وتنمية المنتجات الجديدة بحيث ينتهوا من لمشروع في أقل وقت. ولذا فقد قام قائد الفريق باستخدام مفهوم شبكة بيرت / المسار الحرج لمساعدته في تخفيض الزمن وقد كانت شبكة الأعمال للمشروع كما يلي:



وإذا كانت الأوقات المقدرة لكل نشاط كما يلي (بالأسابيع)

النشاط	الزمن المتفائل	الزمن الأكثر احتمالاً	الزمن المتشائم
أ	3	4	5
ب	3	3.5	7
ج	4	5	6
د	2	3	4
هـ	6	10	14
و	7.5	8.5	12.5
ز	4.5	6	7.5
ح	5	6	13
ط	2	2.5	6
ي	4	5	6

المطلوب:

أ) قم بتنمية الأزمنة المختلفة للأنشطة، ثم حدد الأنشطة الواقعة على المسار الحرج.

ب) ما هو احتمال أن ننتهي من هذا المشروع وبالتالي يتمكن السيد عمر من تقديم البرنامج الجديد في 25 اسبوعاً؟ وخلال 30 اسبوعاً.

15- إذا عدنا للمشكلة الموجودة في التمرين رقم (5) والخاص بتركيب الحاسب الآلي الجديد في الشركة. وبفرض أن المشروع لابد من إنجازه في 16 أسبوعاً. وبالتالي فإن عملية تخفيض وقت المشروع أصبح ضرورياً. يظهر الجدول التالي المعلومات الخاصة بهذا التخفيض.

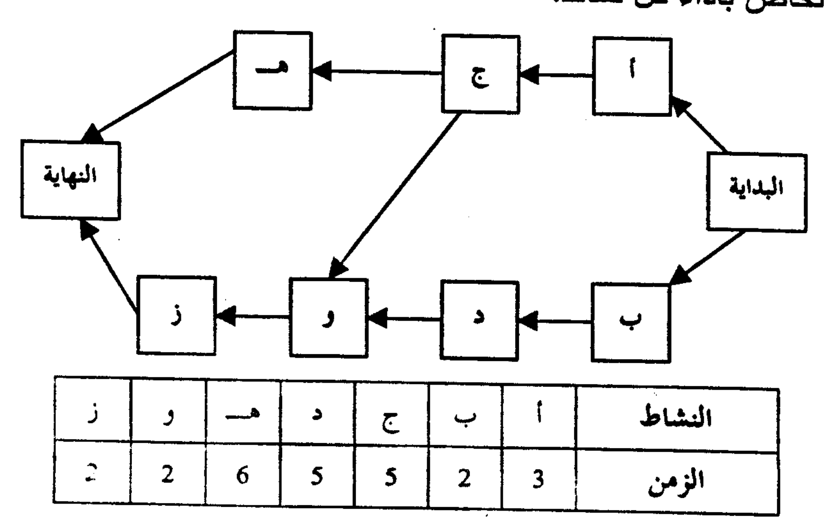
النشاط	الزمن (بالأسابيع)		التكلفة بالجنيه	
	عادي	مخفض	عادي	مخفض
أ	3	1	900	1700
ب	6	3	2000	4000
ج	2	1	500	1000
د	5	3	1800	2400
هـ	4	3	1500	1850
و	3	1	3000	3900
ز	9	4	8000	9800
ح	3	2	1000	2000

المطلوب:

أ) قم بتكوين نموذج برمجة خطية والذي يمكن استخدامه للقيام بعمل تخفيض الوقت الخاص بالمشروع.

ب) قم بتنمية مختلف الأزمنة لكل الأنشطة باستخدام الوقت المخفض.

16- الشبكة التالية تعبر عن الأنشطة اللازمة لأحد المشروعات والزمن الخاص بأداء كل نشاط:



النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز
الزمن	3	2	5	5	6	2	2

والبيانات التالية تعبر عن بيانات تخفيض زمن الأنشطة المختلفة في المشروع.

النشاط	الزمن (بالأيام)		التكلفة بالجنيه	
	عادي	مخفض	عادي	مخفض
أ	3	2	800	1400
ب	2	1	1200	1900
ج	5	3	2000	2800
د	5	3	1500	2300
هـ	6	4	1800	2800
و	2	1	600	1000
ز	2	1	500	1000

المطلوب:

أ) قم بتحديد المسار الحرج، وما هو الزمن المتوقع للانتهاء من المشروع في الوقت العادي.

ب) ما هي التكلفة الكلية لأداء هذا المشروع في ظل الوقت العادي.

17- بالرجوع إلى المشكلة رقم (16) وبفرض أن الإدارة ترغب في إنهاء هذا المشروع في 12 يوماً.

المطلوب:

أ) قم بتنمية نموذج البرمجة الخطية والذي يمكن أن يستخدم في المساعدة على تخفيض زمن المشروع.

ب) ما هي الأنشطة التي يجب أن يتم تخفيض وقتها؟

ج) ما هي التكلفة الكلية للانتهاء هذا المشروع في 12 يوماً.

18- تفكر إحدى الشركات في القيام بتطبيق نظام لجعل العمل المكتبـــي يتـم باستخدام الحاسب الآلي مما يحسن من العمليات الكتابيـة فـي الشـركة، وكذلك من الاتصالات بين مكاتب الشـركة المختلفـة. ويتضمـن هـذا المشروع الخاص بهذا التطبيق عدداً من الأنشـطة والتـي تظـهر فـي الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق عليه مباشرة	الزمن (بالأيام)		التكلفة بالجنيه	
		عادي	مخفض	عادي	مخفض
أ	--	10	8	30	70
ب	أ	8	6	120	150
ج	ب	10	7	100	160
د	أ	7	6	40	50
هـ	د	10	8	50	75
و	ج، هـ	3	3	60	--

المطلوب:

أ) قم برسم شبكة الأعمال لهذا المشروع.

ب) قم تحديد كافة أنواع الأزمنة لكل الأنشطة الخاصة بالمشروع.

ج) ما هي الأنشطة الواقعة على المسار الحرج؟ ومـا هـو الوقـت المتوقع للانتهاء من هذا المشروع (الوقت العادي)؟

د) بفرض أن الشركة ترغب في الانتهاء من هذا المشـروع فـي 26 أسبوعاً. ما هي القرارات الخاصة بتخفيض الوقت التي تنصح بـها حتى تقابل هذا الموعد عند أقل تكلفة ممكنة؟

و) ما هي التكلفة الإضافية التي يجب أن تتحملها الشـركة إذا أرادت الانتهاء من هذا المشروع في 26 أسبوعاً؟



الفصل السابع

البرمجة الخطية: مفاهيم أساسية وتكوين وصياغة المشكلة.



الفصل السابع

البرمجة الخطية: مفاهيم أساسية وتكوين وصياغة المشكلة

مقدمة

تمثل مشكلة ندرة الموارد احد اهم المشاكل التى تواجه منظمات الأعمال، وعلى الإدارة اتخاذ كافة القرارات فى ظل هذه الندرة. وتتعدد المجالات داخل المنظمات التي تظهر فيها الحاجة لاتخاذ القرارات في ظل ندرة الموارد المتاحة مثل:

1- **مشكلة تحديد مزيج المنتجات:** حيث تهدف الإدارة إلى تحديد مزيج المنتجات أو الخدمات الذي يحقق أقصى أرباح للمنظمة.

2- **مشكلة تحديد مزيج المكونات:** وتهدف الإدارة من ذلك إلى تحديد المزيج الأمثل للعناصر المكونة للمنتج، بالشكل الذي يجعل تكاليف الإنتاج أقل ما يمكن.

3- **مشكلة النقل:** تهدف الإدارة من حل مشاكل النقل إلى وصول خطة التوزيع المثالية لنقل المنتجات إلى مراكز توزيعها في المناطق المختلفة بشكل يجعل تكلفة الشحن أقل ما يمكن.

4- **مشكلة التخصيص:** حيث تهدف الإدارة من حل هذه المشكلة إلى تحديد أنسب تخصيص للأفراد على الأعمال والوظائف المتاحة بالشكل الذي يجعل تكلفة العمالة الكلية أقل ما يمكن.

5- **مشكلة جدولة الإنتاج:** تهدف الإدارة من حل هذه المشاكل إلى تحديد كميات الإنتاج الممكن إنتاجها خلال الوقت العادي والوقت الإضافي المتاح خلال فترة معينة بشكل يجعل تكلفة العمالة، وتكلفة المخزون أقل ما يمكن.

ويمثل أسلوب البرمجة الرياضية أحد أشهر الأدوات المستخدمة في حل المشاكل السابقة، وتتضمن البرمجة الرياضية أنواع عديدة، مثل البرمجة الخطية، والبرمجة الاحتمالية، والبرمجة العددية، وسوف نقتصر على أسلوب البرمجة الخطية في حل المشاكل السابقة، نظراً لأنه أكثر أنواع البرمجة الرياضية استخداماً.

البرمجة الخطية إذن هي أسلوب رياضة يهتم بتخصيص الموارد المتاحة بشكل أمثل على الاستخدامات المختلفة، بهدف تعظيم الأرباح أو تدنية التكاليف.

وفي نطاق التعرض لأساليب حل المشكلات باستخدام أسلوب البرمجة الخطية، ينبغي أن نعرض أولاً لعدد من المفاهيم الأساسية. قبل أن نشرع في عرض جوانب هذا الأسلوب.

(1) العلاقة الخطية: المعادلة والمتباينة

تسفر عملية إعداد وتكوين مشكلة ما بغرض حلها باستخدام أسلوب البرمجة الخطية عن مجموعة من المعادلات والمتباينات الخطية والذي يعتبر حلها في آن واحد الخطوة الأساسية لحل المشكلة.

(1-1) المعادلة:

تعبر المعادلة Equation عن مجموعة من المتغيرات التي لابد وان تساوي في مجموعها قيمة معينة، مثال ذلك:

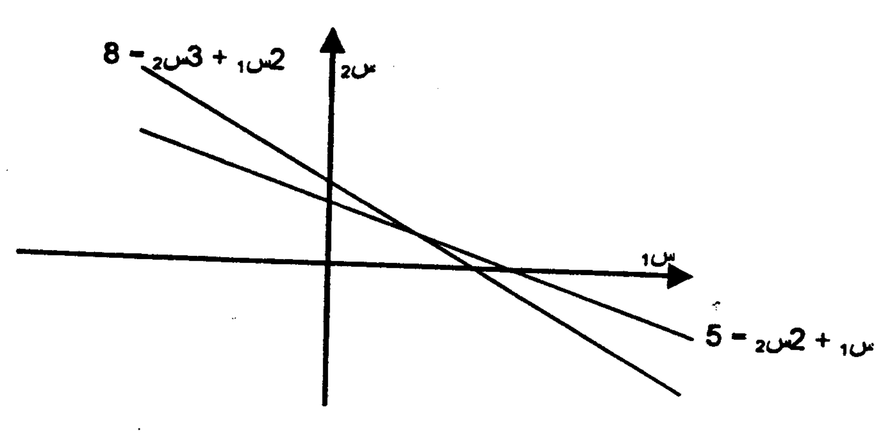
$$2\text{س}_1 + 3\text{س}_2 = 8$$

$$\text{س}_1 + 2\text{س}_2 = 5$$

والمعادلتين السابقتين لهما حل وحيد هو:

$س_1 = 1$ ، $س_2 = 2$

وهذه النقطة ($س_1 = 1$ ، $س_2 = 2$) تكتب عادة (1، 2) هي نقطة تقاطع الخطين الممثلين للمعادلتين السابقتين، كما يوضح ذلك الشكل البياني رقم [7-1]، والذي يوضح أنه في الوقت الذي يتمثل فيه أية نقطة على أحد الخطين حلاً للمعادلة الأخرى، أما تلك النقطة التي يحدث عندها تقاطع الخطان فهي تمثل حلاً لكل من المعادلتين ولكلتاهما معاً.



شكل رقم [7-1]

أما إذا درسنا المعادلة $س_1 + 2س_2 = 10$ نجد أن لها عدد لا نهائي من الحلول، لأن أي نقطة تقع على الخط الممثل لهذه المعادلة تمثل حلاً لها. وفي مثل هذه الحالة ـ التي يكون فيها عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات عموماً ـ نقول أن مجموعة المعادلات غير محددة Undetermined.

تدريب (1)

هل مجموعة المعادلات الآتية غير محددة

2س1 + 3س2 + س 3- 8

س1 + 2س2 + 2س 3- 5

حل التدريب (1)

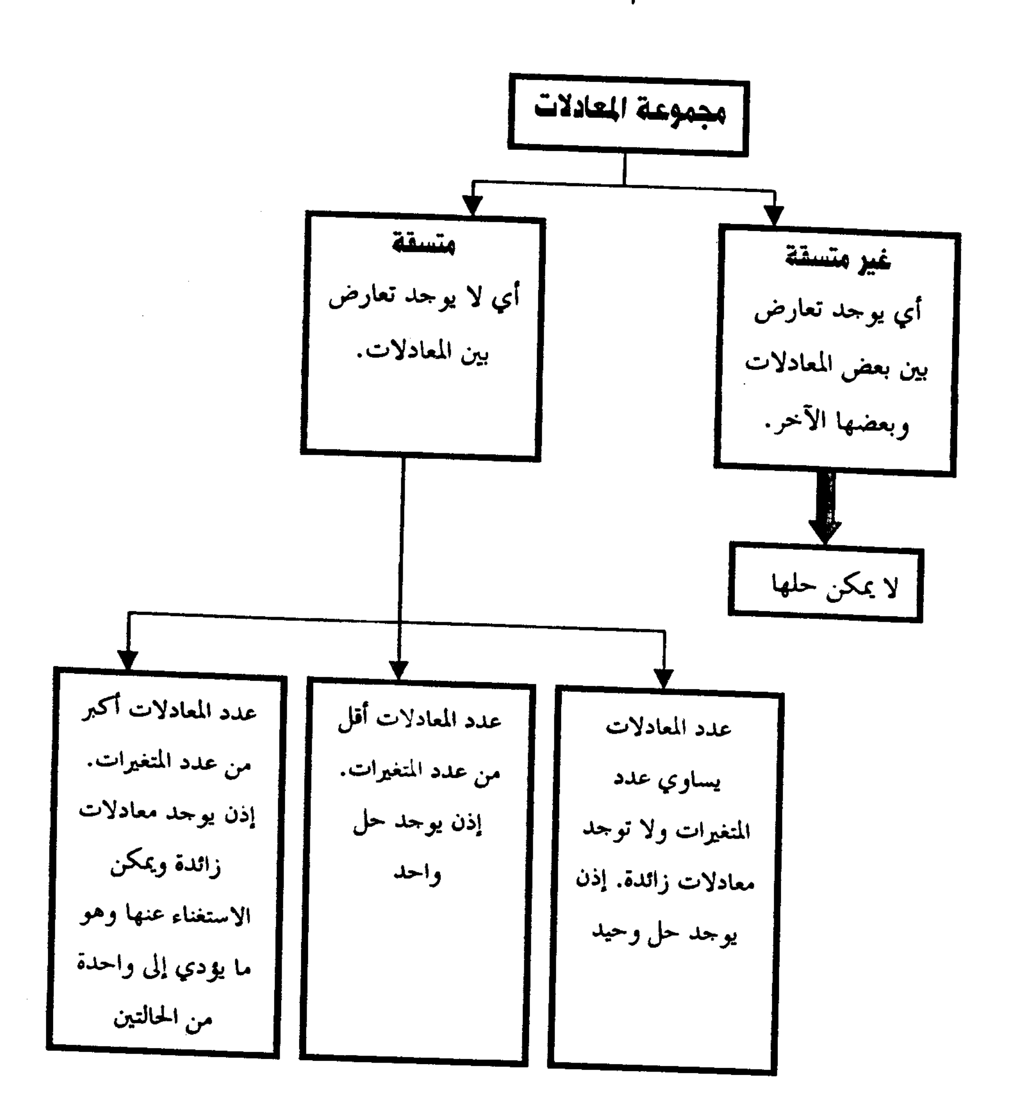
نعم: مجموعة المعادلات غير محدودة، لأن عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات

وأحد الطرق المستخدمة لحل مجموعة المعادلات غير المحددة هي طريقة تحديد المجموعة، أي جعل المعادلات محددة وذلك بتخفيض عدد المتغيرات إلى الحد الذي يتساوى فيه مع عدد المعادلات.

أما في الحالات التي يزيد فيها عدد المعادلات عن عدد المتغيرات فإنه يطلق على مجموعة المعادلات في هذه الحالة بأنها غير متسقة Inconsistent أو أنها تتضمن عدداً من المعادلات أكثر من اللازم Redundant.

ويوضح شكل رقم [7-2] الحالات المختلفة التي يمكن أن تبدو عليها مجموعة المعادلات والنتيجة المترتبة على كل حالة.

شكل رقم [7-2]



مجموعة المعادلات
غير متسقة
أي يوجد تعارض بين بعض المعادلات وبعضها الآخر.
متسقة
أي لا يوجد تعارض بين المعادلات.
لا يمكن حلها
عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات ولا توجد معادلات زائدة. إذن يوجد حل وحيد
عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات. إذن يوجد حل واحد
عدد المعادلات أكبر من عدد المتغيرات. إذن يوجد معادلات زائدة ويمكن الاستغناء عنها وهو ما يؤدي إلى واحدة من الحالتين

تدريب (2)

$$2\text{س}_1 + 3\text{س}_2 = 10$$

$$\text{س}_1 + 4\text{س}_2 = 8$$

$$\text{س}_1 + 2\text{س}_2 = 6$$

هذه المجموعة من المعادلات يمكن الاستغناء عن واحدة منها

حدد ما هي هذه المعادلة

حل التدريب (2)

يمكن الاستغناء عن المعادلة

$$\text{س}_1 + 4\text{س}_2 = 8$$

لأنها تتعارض مع المعادلة الأولى

تدريب (3)

$$5\text{س}_1 + 2\text{س}_2 = 75$$

$$3\text{س}_1 + 5\text{س}_2 = 60$$

$$7\text{س}_1 + 8\text{س}_2 = 50$$

هل مجموعة المعادلات السابقة متسقة؟ ولماذا؟

حل التدريب (3)

مجموعة المعادلات غير متسقة لأن عدد المعادلات يزيد عن عدد المتغيرات

والآن وبعد أن عرضنا لمفهوم المعادلة، ومجموعة المعـــادلات آن الوقت لنعرض لمفهوم المتباينة، والفرق بينها وبين المعادلة.

(1-2) المتباينة:

تصادفنا المتباينات Inequality كثيراً ونحن بصدد دراســة أســلوب البرمجة الخطية، وتشير المتباينة إلى مجموعة من المتغيرات والتي قــد تساوي مجموعها قيمة معينة بالذات أو أقل منها أو أكبر منها. وتتكــون المتباينة من طرفين يفصلهما أياً من الرموز الآتية:

- $<$ أقل من
- $\leq$ أقل من أو يساوي
- $>$ أكبر من
- $\geq$ أكبر من أو يساوي

وتقضي طبيعة أسلوب البرمجة الخطية أن تعمــل فقــط باســتخدام الرمز بين $\leq$، $\geq$. دعنا الآن نتفق على اصطلاح متباينة مــن النــوع الأول للمتباينة التي يمثلها الرمز $\leq$، ومتباينة من النوع الثاني لتلك التي يمثلها الرمز $\geq$. والآن دعنا نوضح أهم الفروق بين المعادلة والمتباينة.

1- أي نقطة تقع على الخط الممثل للمعادلة تحقق المعادلة، بينمــا أي نقطة تقع على الخط الممثل للمتباينة أو تقع أسفله أو أعلى منــه تحقق المتباينة ويتوقف ذلك على طبيعة المتباينة ويمكن توضيح ذلك بالأمثلة الآتية:

$3\text{س}_1 + 2\text{س}_2 < 15$: أي نقطة تقع أسفل الخط الممثل لهذه المتباينة تحقق المتباينة.

$4\text{س}_1 + 5\text{س}_2 \leq 15$: أي نقطة تقع على الخط الممثل لهذه المتباينة أو أسفله تحقق المتباينة

$3\text{س}_1 + 6\text{س}_2 > 15$: أي نقطة تقع أعلى الخط الممثل لهذه المتباينة تحقق المتباينة

$4\text{س}_1 + 3\text{س}_2 \geq 15$: أي نقطة تقع على الخط الممثل لهذه المتباينة أو أعلاه تحقق المتباينة

2- عند إخضاع المتباينات للعمليات الحسابية (جمع، طرح، ضـرب، قسمة) لن تختلف عن المعادلات إلا في الاستثناءات الآتية:

أ. إذا تم ضرب طرف المتباينة في كمية ثابتة سالبة يجب أن تتغير إشارة المتباينة للعكس.

مثال: **يمكن القول أن 7 أقل من 10 هكذا:**

10 > 7

وبضرب طرفي المتباينة في كمية ثابتة سالبة مقدارها -1 مثلاً تصبح المتباينة على الصورة الآتية:

10- < 7-

تدريب (4)

حدد معنى المفاهيم الآتية

- البرمجة الخطية.
- مجموعة المعادلات غير المحدودة ومجموعة المعادلات غير المتسقة.
- المتباينة.

ب. إذا تم قسمة كل من طرفي المتباينة على كمية ثابتة سالبة يجب أن تتغير إشارة المتباينة للعكس.

مثال: يمكن القول كما في المثال السابق أن 7 أقل من 10 هكذا:

10 > 7

وبقسمة طرفي المتباينة على كمية ثابتة سالبة ولتكن -2

إذن $\frac{7}{2-} < \frac{10}{2-}$

5- < 3.5-

التدريب (5)

يقال أن ≥ أو ≤ يمثلها نصف مجال مغلق Closed Half Space، و > أو < يمثلها نصف مجال مفتوح Open Half Space

اشرح معنى ما سبق.

كان حديثنا فيما سبق مقتصر على المتباينة الواحدة ونصف المجـال الذي يمثلها، دعنا الآن نتحدث عن تقاطع عدد من المجالات التي يمثلـها عدد من المتباينات، وسوف نستعين بالمثال التالي لشرح الأفكار التي نود طرحها.

مثال

$س_1 - 2س_2 \le 8$

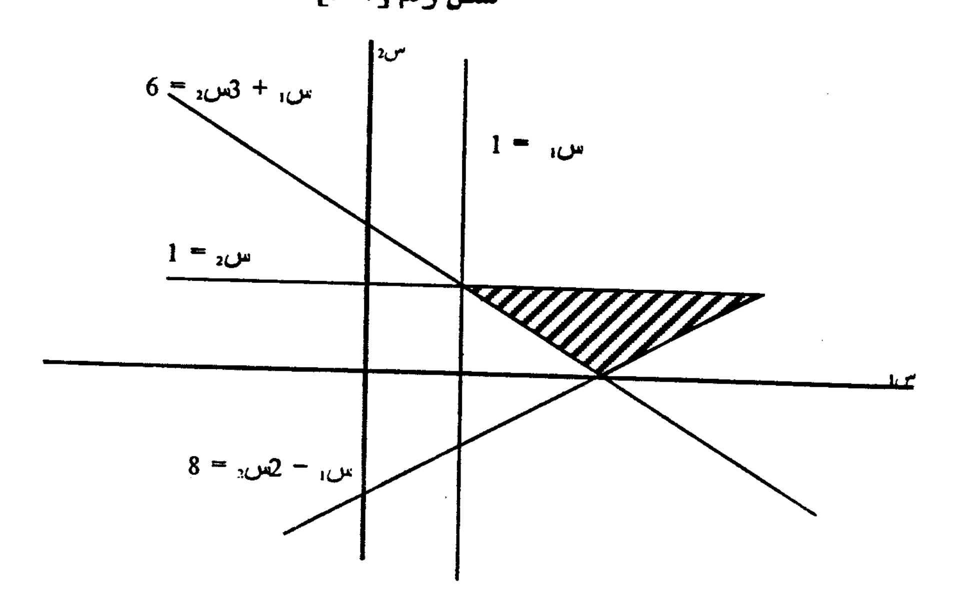
$س_1 + 3س_2 \ge 6$

$س_1 \ge 1$

$س_2 \ge 1$

بحل هذه المتباينة وتمثيلها بيانياً سوف يظهر لنا الشكل البياني رقم [7-3]

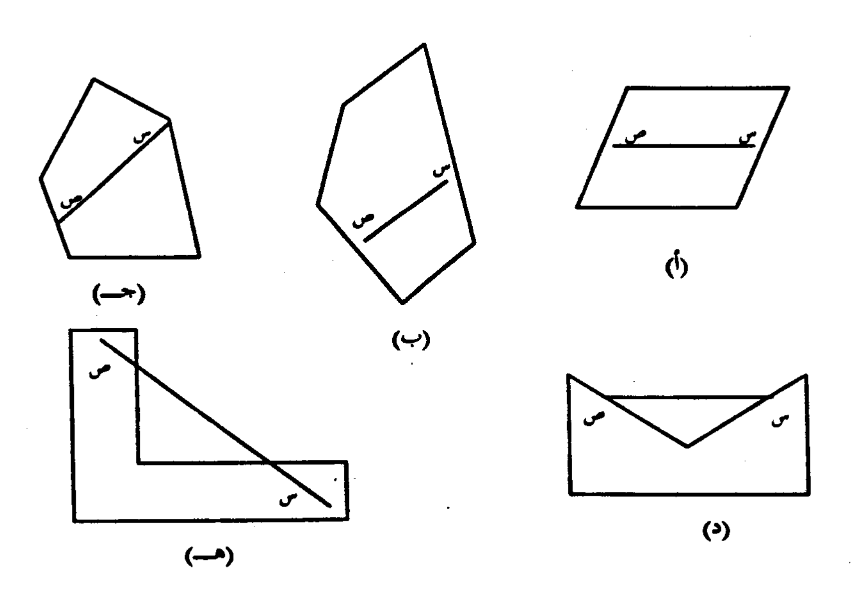
شكل رقم [7-3]



ويلاحظ من الشكل [7-3] أن حل المتباينات الأربعة يعطي مجـــالاً Space على شكل مثلث مغلق، ويعني ذلك أن أي نقطة تقع داخل هـــذا المثلث أو على حدوده تمثل أحد الحلول التي تحقق المتباينات الأربعـــة معاً وعند هذا الحد يمكن ملاحظة ما يلي:

1- بشكل عام يؤدي تقاطع عدد من المجالات المقفلة أو غير المقفلة إلى تكوين شكل محـــــدودب متعـــدد الــرؤوس Polyhedron Convex (مقفل أو مفتوح). ويقصد بالرأس أي نقطة تقع بيـــن نقطتين آخرين في الشكل (وتعرف جبرياً بأنها أي نقطة فـــي الشكل المحدودب لا يمكن التعبير عنها في صورة وسط مرجح لأي نقطتين آخرين في الشكل المحدودب)، ومن أهم خصائص الشكل المحدودب أن أي خط يصل بين نقطتين في الشكل لابـد وأن يقع بكامله داخل الشكل. والشكل رقم [7-4] يوضح بعض الأشكال الهندسية، تعالى نتعرف عليه.

شكل رقم [7-4]



يلاحظ أن الاشكال (أ)، (ب)، (ج)، أشكال محدودبة، أما الأشكال (ء)، (هـ) فهي أشكال غير محدودبة، وفي مجال دراستنا لأسلوب البرمجة الخطية، فإننا سوف نتعامل دائماً مع الأشكال المحدودبة.

تدريب (6)
ما هى الخصائص الشكل المحدود والشكل غير المحدودب؟

2- يلاحظ أن المتباينة الثالثة لم تخدم أى هدف، بمعنى أنها لم تشارك فى تحديد أحد أضلاع الشكل المحدودب (المثلث فى هذه الحالة) فى الشكل رقم [7-4]، وهو ما يعنى أن حذف هذه المتباينة لن يترتب عليه شيء، ولن يؤثر فى الحل أو الحلول التى تحقق جميع المتباينات. ويطلق على المتباينة من هذا النوع متباينة سطحية او غير عاملة Superfluaus or Inoperative Inequality.

متطلبات عدم السالبية

في نطاق دراستنا لأسلوب البرمجة الخطية يتبقى لنا ملاحظة في غاية الأهمية. وتتبع أهمية هذه الملاحظة من أنها تتعلق بمنطق عملية البرمجة في حد ذاته فسوف نلاحظ من الشكل رقم [7-5]، أن كلا من المتغيرين $س_1$، $س_2$ يتخذ قيماً موجبة أو سالبة حسب وقوع قيمة المتغير في أحد أرباع الشكل فوقوع النقطة ($س_1$، $س_2$) في الربع الأول تعني أن قيمة كل من $س_1$، $س_2$ موجبة، بينما وقوع النقطة في الربع الرابع تعني أن قيمة كل من $س_1$، $س_2$ سالبة، وفي نطاق دراستنا لأسلوب البرمجة

الخطية لحل المشكلات ، فمن غير المعقول ولا المقبول أن نتحدث عن إنتاج سالب، أو نقل المنتجات من وحدات ***الاستهلاك*** إلى ***وحدات إنتاج***، أو إنتاج تشكيلة سالبة من المنتجات، كما لا يكون من المعقول أن يكون هدفنا من استخدام أسلوب البرمجة الخطية أن تحقق أرباح سالبة أو حتى نخفض التكاليف لدرجة أن تصبح سالبة.

شكل رقم [7-5]

الربع الثاني (– ، +)	الربع الأول (+ ، +)
الربع الرابع (– ، –)	الربع الثالث (+ ، –)

بناءاً عليه فإن مجال دراستنا لأسلوب البرمجة الخطية سيكون مقصوراً على القيمة الموجبة للمتغيرات، أي القيم المحصورة في المربع الأول من الشكل رقم [7-5].

مفهوم العلاقة الخطية والعلاقة غير الخطية:

الخطية هي صورة خاصة من صور العلاقة بين ظاهرتين أو أكثر، حيث تأخذ العلاقة بين ظاهرتين س1، س2 الصورة الخطية إذا كان تغيراً ما في قيمة الظاهرة س1 يؤدي إلى تغير ما في قيمة الظاهرة س2 ولكن بمقدار ثابت، فيما عدا ذلك تكون العلاقة غير خطية، كما يوضح ذلك الجدول رقم [7-1].

جدول رقم [7-1]

		العلاقة الخطية		العلاقة غير الخطية	
$س_1$	التغير في $س_1$	$س_2$	التغير في $س_2$	$س_2$	التغير في $س_2$
0	1				
1	1	5	2	0	
2	1	7	2	1	1
3	1	9	2	4	3
4	1	11	2	9	5
5	1	13	2	16	7
6	1	15	2	25	9
7	1	17	2	36	11
8	1	19	2	49	13
9	1	21	2	64	15
10	1	23			

ويلاحظ من دراسة جدول العلاقة الخطية أن تغيراً بمقدار وحدة في المتغير س1 يؤدي إلى تغير بكمية ثابتة مقدارها 2 في المتغير $س_2$ وهو ما يعني أن العلاقة خطية بين المتغيرين (الظاهرتين) $س_1$، $س_2$.

ويمكن استنتاج شكل هذه العلاقة كما يلي:

$$س_2 = 5 + 2س_1$$

ولاشك أنه باستخدام أساسيات علم التفاضل فإن إيجاد المشتقة الأولى لهذه العلاقة يسفر عن:

$$\frac{د(س_1)}{د(س_2)} = 2 = \text{الميل}$$

أي أن ميل الخط المحتمل للعلاقة بين الظاهرتين $س_1$، $س_2$ ***ثابت*** وتلك هي ***دلالة العلاقة الخطية***.

> **تذكر أن:** تصبح العلاقة بين متغيرين أو ظاهرتين خطية إذا كان الميل لهذه العلاقة كمية ثابتة ومعلومة.

أما دراسة جدول العلاقة غير الخطية فيوضح، أن تغـــيراً بوحـــدة واحدة في المتغير $س_1$، لا يقابله تغير بكمية ثابتـــة فـــي المتغـــير $س_2$، وباستقرار بيانات الجدول يمكن أن نتبين أن العلاقة بين المتغـيرين $س_1$، $س_2$ تأخذ الصورة العامة الآتية:

$$س_2 = س_1^2$$

وبإيجاد المشتقة الأولى لهذه العلاقة نجد أن:

$$\frac{د(س_1)}{د(س_2)} = 2\,س_1$$

ولا شك أن ميل الخط البياني للعلاقة بين $س_1$، $س_2$ غير ثابت لأنـــه يتوقف على قيمة المتغير $س_1$، ولا شك أن عدم ثبات الميل يؤكد العلاقـة غير الخطية.

والآن ما علاقة مفهوم الخطية الذي عرضنا له فيما سبق بمشـــكلة البرمجة الخطية؟ في الواقع يشير لفظ "البرمجة الخطية" إلى أن اهتمامنـا يكون مقصوراً على العلاقات الخطية، وحتى يتضح مفهوم الخطية أكـثر دعنا نأخذ أحد المشاكل الشائعة والتي يستخدم في حلها أسلوب البرمجـة الخطية وهي مشكلة تحديد التشكيلة المثلى من المنتجـات التـي تحقـق أقصى ربح ممكن للشركة. فإن مفـــهوم الخطيـــة فـــي هـــذه المشـــكلة يشير إلى:

1- ***ثبات المعاملات الفنية***: بمعنى أن العلاقة بين المنتجـات ومـا تحتاجه من عناصر الإنتاج يظل ثابت، فإذا قلنا مثلاً أن إنتـاج الوحدة من المنتج س1 يحتاج إلى 5 ساعات على الآلة الولى، و8 ساعات على الآلة الثانية، فمعنى ذلك أن إنتاج 100 وحـدة

من المنتج س1 يتطلب توافر 500 ساعة على الآلة الأولى، و800 ساعة على الآلة الثانية وهكذا...

2- ***ثبات العائد بالنسبة للوحدة المنتجة***: حيث يتغير هذا العائد طردياً مع مستوى الإنتاج، فمثلاً إذا كان الربح من المنتج س1 مثلاً عند إنتاج وحدة واحدة هو 6 جنيهات، فمعنى إنتاج 10 وحدات من هذا المنتج أن يصبح الربح 60 جنيهاً، كما أن إنتاج 20 وحدة يترتب عليه تحقيق أرباح 120 جنيهاً وهكذا ...

ومن وجهة النظر الاقتصادية، فإن مفهوم الخطية يعني ما يلي:

- التناسب بين كمية المستخدم من عناصر الإنتاج مع الكمية المنتجة من هذه العناصر.
- أن ناتج ممارسة مجموعة من الأنشطة مجتمعة يساوي مجموع نواتج ممارسة كل نشاط على حدة وهو ما يشير ضمناً إلى أن أسلوب البرمجة الخطية يهمل فكرة أثر التفاعل المشترك Synergy Effect.
- هذين المفهومين من وجهة النظر الاقتصادية هو ما يطلق عليه الاقتصاديون ***ثبات الغلة***، وليس كما هو شائع على وجه الخطأ. ما يسمى بخطية دالة الإنتاج Linear Production Function، لماذا؟ لأن أسلوب البرمجة الخطية ما زال يمكنه التعامل مع دوال الإنتاج غير الخطية عن طريق زيادة عدد النشطة أو المتغيرات.

تكوين وصياغة المشكلة

يقصد بتكوين وصياغة مشكلة البرمجة الخطيـة تحويـل البيانـات الوصفية المتاحة عن المشكلة إلى علاقـات رياضيـة (معـادلات، أو متباينات أو هما معاً) بالشكل الذي يسمح بالتعامل معـها مـن خـلال خطوات حل المشكلات باستخدام أساليب البرمجة الخطية، صحيـح أن طبيعة المشكلات تختلف غير أن هذه المشكلات، سوف يتـم صياغتـها وفقاً لهيكل محدد يمليه أسلوب البرمجة الخطية، حيث يتكون هذا الـهيكل من ثلاثة أجزاء هي:

1- **دالة الهدف** Objective Function: تعبر دالة الهدف عمـا يرغـب متخذ القرار أو صاحب المشكلة في تحقيقه، وفي نطاق اسـتخدام أسلوب البرمجة الخطية لا يخرج هذا الهدف عن تعظيم الأربـاح أو تدنية التكاليف.

2- **قيود المشكلة** Constraints: وتمثل مجموعة المحددات التي يجـب أخذها في الاعتبار عند تحقيق الهدف، فإذا كنا نرغب في تحقيـق أقصى أرباح ممكنة من إنتاج سلعتين س1، س2، فـلا شـك أن يوجد العديد من القيود التي يجب أخذها في الاعتبار عند محاولـة تحقيق هذا الهدف، منها على سبيل المثال لا الحصر، أن السـوق لا يمكنه استيعاب أي حجم من الإنتاج يمكن إنتاجـه، كمـا أن الموارد الخاصة للشركة مثل المواد الخـام والآلات، والأمـوال والعمالة محدودة هي أيضاً وعلى ذلك كان لزاماً أن تراعى مثـل هذه القيود عند صياغة المشكلة.

3- **قيد عدم السالبية**: أشرنا في الفصل السابق إلى أننا في نطاق حل المشكلات باستخدام أسلوب البرمجة الخطية سـوف نتعـامل مـع

ظواهر أو متغيرات ذات قيمة حقيقية موجبة، بمعنى أنه من غير المعقول أن تنتج وحدات بالسالب، أو أن نقرر نقل الوحدات من مراكز الاستهلاك إلى مراكز الإنتاج، يضاف إلى ذلك أن التعامل مع قيم موجبة، يبعدنا عن مغبة الوقوع في تحقيق أهداف وهمية كأن نحقق أرباحاً سالبة مثلاً. إن وجود قيد عدم السلبية يضمن لنا عدم ظهور قيم سالبة للمتغيرات الأساسية للمشكلة، صحيح أن بعض صور البرمجة (البرمجة بالأعداد الصحيحة Integer Programming يتطلب بالإضافة إلى قيد عدم السلبية قيد آخر يمنع ظهور قيم كسرية عند حل المشكلة، ففي بعض الحالات يكون ذلك أمراً ضرورياً فمن غير المقبول أن نستأجر نصف آلة أو أن تصنع ¼ تلفزيون وسوف نناقش هذا في حينه.

وفي هذا الجزء المتبقي من هذا الفصل سوف نعرض العديد من الأمثلة التي توضح كيف يمكننا أن نتعامل مع المشكلات والتعبير عنها وصياغتها في صورة قابلة للحل باستخدام أسلوب البرمجة الخطية.

مثال (7 ـ 1)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج سلعتين هما أ، ب فإذا علمت أن ربح الوحدة وتكلفتها لكل سلعة تظهران كما هو موضح في الجدول الآتي بعد.

وتقوم الشركة بإنتاج السلعتين بنفس العملية الصناعية، ولكنها تبيع كل منهما في سوق مختلف، حيث يبلغ حجم الطاقة المتاحة لإنتاج 30,000 ساعة عمل، ويستغرق إنتاج الوحدة من المنتج ب ساعة عمل واحدة، ومن خلال بحث تسويقي، اتضح أن الشركة تستطيع بيع 8,000

حدة من المنتج أ كحد أقصى 12,000 وحدة من المنتج ب أيضاً كحـــد
قصى.

	المنتج أ	المنتج ب
الإيراد	60 جنيه	40 جنيه
التكلفة	30 جنيه	10 جنيه

مطلوب: تكوين مشكلة البرمجة الخطية التي تعظم أرباح الشركة.

الحـــــل :

) تجهيز بيانات المشكلة

المنتجات	السعر	التكلفة	الربح	عدد ساعات اللازمة لإنتاج الوحدة	المبيعات
أ	60	30	30	3	8,000 كحد أقصى
ب	40	10	30	1	12,000 كحد أقصى

) وضع رموز للتعبير عن متغيرات المشكلة

افترض أن $س_1$ الكمية المنتجة والمباعة من المنتج أ

$س_2$ الكمية المنتجة والمباعة من المنتج ب

ر الربح الكلي.

) تحديد دالة الهدف

ن نرغب في تعظيم الربح الكلي ر والسؤال الآن، كيف نحدد قيمة ر؟

بح الكلي = ربح الوحدة من المنتج أ × عدد الوحدات المنتجـــة والمباعـــة منـــه
+ ربح الوحدة من المنتج ب × عدد الوحدات المنتجة والمباعة منه

أي أن

= 30س1 + 30 س2 ومن ثم فإن دالة الهدف للمشكلة التي بين أيدينا هي:

المطلوب تعظيم

$ر = 30س_1 + 30 س_2$

من بيانات التمرين يتضح أن:

- كل وحدة من المنتج أ تحتاج إلى 3 ساعات.
- كل وحدة من المنتج ب تحتاج إلى ساعة عمل واحدة.
- عدد ساعات العمل المتاحة = 30,000 ساعة عمل.

ومعنى ذلك أنه يجب ألا تزيد عـــدد الســـاعات اللازمـ لإنتاج عدد معين من الوحدات من المنتج أ وعدد آخـــر مـ الوحدات من المنتج ب عن 30,000 ساعة.

$3س_1 + س_2 \leq 30,000$ وحدة

ب. تحديد القيود الخاصة بالمبيعات

من بيانات التمرين يتضح أن السوق لن يستوعب أكــ من 80,000 وحدة من المنتج أ، إذن يجب ألا يزيد الإنتاج ع 80,000 ووحدة من المنتج أ، وهذا قيد علـــى الإنتـــاج مـ المنتج أ يمكن التعبير عنه كالآتي:

عــــدد الوحدات المنتـــــــجة من المنتج أ يجـــــــب أن تساوي أو تكون أقل من 8,000 وحدة

$\therefore س_1 \leq 8,000$

كذلك يتضح من بيانات التمرين السابق أن السوق لن يستوعب أكثر من 12,000 وحدة من المنتج ب، إذن يجب ألا يزيد الإنتاج من المنتج ب عن 12,000 وحدة، وهذا يمثل قيد آخر يمكن التعبير عنه كما يلي:

عدد الوحدات المنتجة من المنتج ب يجب أن تساوي أو تكون أقل من 12,000 وحدة

$$\therefore س_2 \leq 12,000$$

6) تحديد قيد عدم السالبية

يهدف هذا القيد إلى منع ظهور أياً من المتغيرات الأساسية للمشكلة في صورة سالبة (نقصد بالتغيرات الأساسية للمشكلة – المتغيرات الممثلة للسلع أو المنتجات). ويمكن التعبير عن هذا القيد كالآتي:

عدد الوحدات المنتجة من المنتج أ ، عدد الوحدات المنتجة من المنتج أ ≤ صفر

$$\therefore س_1، س_2 \leq صفر$$

➢ **المشكلة في شكلها النهائي**

المطلوب تعظيم

$$ر = 30س_1 + 30\ س_2$$

وذلك في ظل القيود الآتية:

$$3س_1 + س_2 \leq 30,000$$

$$س_1 \leq 8,000$$

$$س_2 \leq 12,000$$

$$س_1، س_2 \leq صفر$$

مثال (7.2)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج أربعة منتجات أساسية هي أ، ب، جـ، د، ويحتاج المنتج أ إلى ساعتين على آلة الخراطة وساعة على آلة التجميع، كما يتكلف 10 جنيه لإعداده للتخزين، أما المنتج ب فيحتاج إلى ساعة واحدة على آلة الخراطة، و3 ساعات على آلة التجميع، ويتكلف 5 جنيه لإعداده للتخزين، في حين يحتاج المنتج جـ إلى 2.4 ساعة على آلة الخراطة، و2.5 ساعة على آلة التجميع، ويتكلف 2 جنيه إعداده للتخزين، وأخيراً فإن المنتج د يحتاج إلى 5 ساعات على آلة الخراطة، ولا يحتاج إلى تجميع، ويتكلف 12 جنيه إعداده للتخزين.

فإذا علمت أن الشركة لديها طاقة خراطة 120 ساعة وطاقة تجميع مقدارها 160 ساعة، وأن المخصصات المتاحة لإعداد المنتجات للتخزين 1000 جنيه ويعطي المنتج أ ربحاً صافياً مقداره 40 جنيه والمنتج ب يعطي ربحاً صافياً للوحدة مقداره 24 جنيه أما الأرباح الصافية للوحدة من المنتجين جـ، د فهي 36، 23 على الترتيب وقد توافرت معلومات عن السوق لدى الشركة بأنه لا يمكن بيع أكثر من 20 وحدة من المنتج أ، ولا أكثر من 16 وحدة من المنتج جـ أما المنتجات ب، د فيمكن بيع أي كمية منهما على ألا تقل عدد الوحدات المنتجة والمباعة من المنتج د عن 10 وحدات حيث يوجد عقد بتسليم هذه الكمية وينبغي الالتزام به.

المطلوب

وضع المشكلة السابقة في صورة برمجة خطية إذا علمت أن الشركة تهدف إلى تعظيم الربح الناشئ من إنتاج وبيع هذه المنتجات.

(1) تجهيز البيانات

المنتجات	قسم الخراطة	قسم التجميع	تكلفة الإعداد للتخزين	صافي ربح الوحدة	المبيعات
أ	2	1	10	40	20 وحدة على الأكثر
ب	1	3	5	24	أي كمية 16 وحدة
جـ	2.5	2.5	2	36	على الأكثر 10 على
د	5	0	12	23	الأقل
الطاقة المتاحة	120	160	1000		

(2) وضع رموز للتعبير عن متغيرات المشكلة

افترض أن

س_1 = الكمية المنتجة والمباعة من المنتج أ.

س_2 = الكمية المنتجة والمباعة من المنتج ب.

س_3 = الكمية المنتجة والمباعة من المنتج ج.

س_4 = الكمية المنتجة والمباعة من المنتج د.

ر = الأرباح الكلية.

(3) تحديد دالة الهدف

نحن نهدف إلى تعظيم الربح الكلي أي تعظيم قيمة ر إذن دالة الهدف هي: **المطلوب تعظيم.**

$$\text{ر} = 40\,\text{س}_1 + 24\,\text{س}_2 + 36\,\text{س}_3 + 23\,\text{س}_4$$

(4) تحديد قيود المشكلة

أ- القيد الخاص بقسم الخراطة:

$$2\,\text{س}_1 + \text{س}_2 + 2.5\,\text{س}_3 + 5\,\text{س}_4 \le 150$$

ب- القيد الخاص بقسم التجميع:

$\text{س}_1 + 3\text{س}_2 + 2.5\,\text{س}_3 + \leq 160$

جـ- القيد الخاص بتكلفة التخزين:

$10\,\text{س}_1 + 5\,\text{س}_2 + 2\,\text{س}_3 + 12\,\text{س}_4 \leq 1000$

د- القيود الخاصة بالمبيعات:

$\text{س}_1 \leq 20$

$\text{س}_2 \leq 16$

$\text{س}_3 \leq 10$

هـ- قيد عدم السالبية:

$\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{س}_3 ، \text{س}_4 \geq 0$

الفصل الثامن

البرمجة الخطية: أساليب حل المشكلات والثنائية

الفصل الثامن

اساليب حل المشكلات

أولاً: الحل البياني

يتم اعتبار الحل البياني من خلال تمثيل قيود مشكلة البرمجة الخطية هندسياً والذي يعد وسيلة ناجحة في توضيح الكثير من المشاكل المرتبطة بها، حيث يمكننا الإلمام بالمفاهيم العامة لأسلوب البرمجة الخطية من خلال التعرف على طبيعة المفاهيم التي تصاحب مشكلات البرمجة الخطية ذات المتغيرين.

حقا فإن المشكلات في الواقع العملي أكثر تعقيدا وتنطوي على العديد من المتغيرات، غير أننا سوف نتخذ هذا الفصل كأداة مبسطة لعرض سبيل حل المشكلات التي تواجهنا في الواقع.

جوانب أسلوب التمثيل الهندسي

يقتصر التصوير الهندسي لمشاكل البرمجة الخطية على تلك المشكلات ذات المتغيرين، أما المشاكل التي تنطوي على متغيرات تزيد عن أثنين فسوف يستحيل حلها بيانيا (هندسيا) إذ يصعب في هذه الحالة على العقل أن يتخيل المجال المغلق الملائم لحل المشكلة، وعلى ذلك يمكن إيجاز خطوات حل المشكلات بإستخدام التمثيل البياني كما يلي:

(1) ينظر إلى العلاقات الرياضية أيا كان نوعها على أنها معادلات.

(2) يتم جعل قيمة أحد المتغيرين في العلاقة الرياضية صفرا ومن ثم يتسنى تحديد قيمة المتغير الآخر.

(3) يتم تمثيل النقاط التي تمثل المعادلات بيانياً، ومنها نستخلص ما يطلق عليه منطقة الحل الممكن Feasible Solution Erea.

(4) يتم اختيار منطقة الحل الممكن-كما سيأتي بعد- تحديد الحل الأمثـــل للمشكلة.

وغنى عن البيان أن هناك العديد من المشاكل التي يصعب تحديد منطقـــة الحل الممكن لها كما سوف يتضح من خلال الأمثلة في هذا الفصل.

مثال (8-1):

اجعل أكبر ما يمكن : حيث أن

$$ر = 4س_1 + 8س_2$$

بشرط:

$4س_1 + 2س_2 \leq 800$

$4س_1 + 4س_2 \leq 1000$

$2س_1 + 6س_2 \leq 1200$

$س_1 ، س_2 \geq$ صفر

الحل:

(1) تحويل المتباينات إلى المعادلات

$4س_1 + 2س_2 = 800$ .... (1)

$4س_1 + 4س_2 = 1000$ .... (2)

$2س_1 + 6س_2 = 1200$ .... (3)

(2) تحديد نقاط التمثيل الهندسي للمعادلات

المعادلة الأولى: سوف نفترض أن $س_1$=صفر

$$\therefore س_2 = \frac{800}{2} = 400$$

سوف نفترض أن $س_2$=صفر

$$\therefore س_1 = \frac{800}{4} = 200$$

وعلى ذلك يمكن تمثيل المعادلة (1) بيانيا بإستخدام النقطتين (صفر ، 400) ، (200 ، صفر).

المعادلة الثانية: سوف نفترض أن $س_1$=صفر

إذن $س_2 = \frac{1000}{4} = 250$

كذلك سوف نفترض أن $س_2$=صفر

إذن $س_1 = \frac{1000}{4} = 250$

وعلى ذلك يمكن تمثيل المعادلة (2) بيانيا من خلال النقطتين (صفر ، 250) ، (250 ، صفر)

المعادلة الثالثة: بافتراض أن $س_1$=صفر

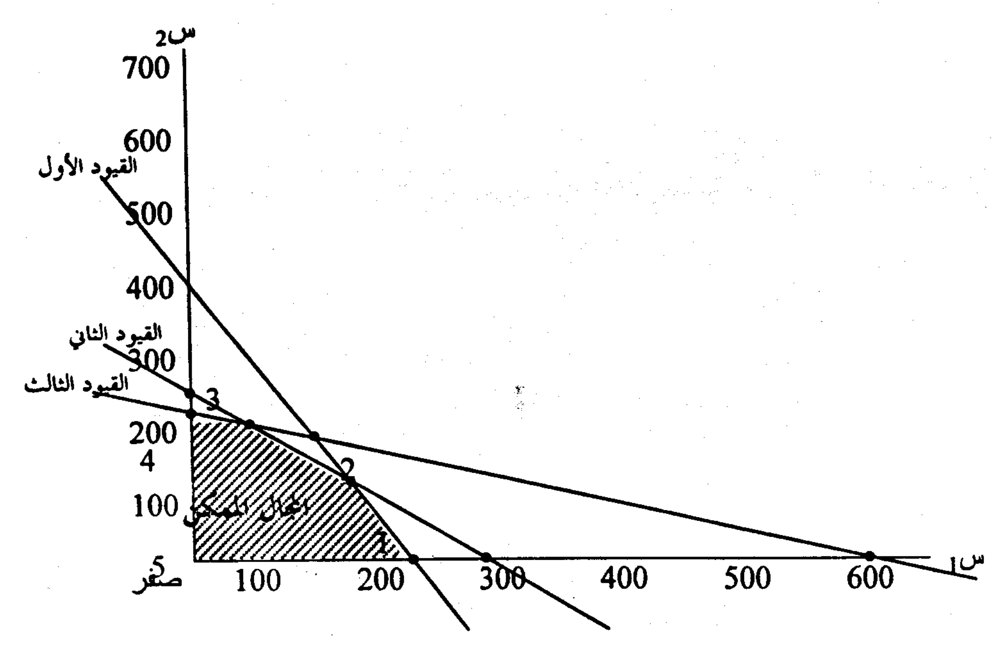
إذن $س_2 = \frac{1200}{6} = 200$

كذلك بافتراض أن $س_2$=صفر

إذن س$_1$ = $\frac{1200}{2} = 600$

وعلى ذلك يمكن تمثيـــل المعادلـــة (3) بيانيـــا مـــن خـــلال النقطتيـــن (صفر ، 600) ، (600 ، صفر)

ويوضح الشكل رقم (8-1) التمثيل البياني لقيود المشكلة السابقة



ويلاحظ من الشكل البياني السابق أننا استخدمنا الربح الأول (الموجـــب) وفق مقتضيات أسلوب البرمجة الخطية والذي لا يسمح بظهور قيـــم ســـالبة للمتغيرات. كما أن المجال الممكن للحل هو تلك المنطقة (الشكل المحـــدودب متعدد الرؤوس) كما سبق الإشارة إلى ذلك الذي يحقق كل القيود دفعة واحـدة. وهو الشكل المظلل بالرسم. ومن ثم فإن أي نقطة تقع بداخل منطقـــة الحـل الممكن أو على حدودها. تمثل حلا ممكنا للمشكلة، غير أنه يجب أن نلاحظ أن هناك فرق بين الحل الممكن والحل الأمثل. ففي ظل البرمجة الخطية تســـعى دائما لتحقيق الأمثلية. وإذا أمعنا النظر في منطقة الحل الممكن، لن يكون مـــن

الصعب علينا أن نكتشف أن هناك عـــدد لا نـــهائي مـــن الحلـــول الممكنـــة لهذه المشكلة.

والواقع أن نظرية البرمجة الخطية تقتضي أنه يمكن إختصار العدد الـــلا نهائي من الحلول الممكنة التي تمثل رؤوس الشكل المحدودب متعدد الـــرؤوس (منطقة الحل الممكن) المشار إليها بالأرقام 1،2،3،4،5،6 في مثالنـــا. ولكـــن السؤال الذي يثار هنا لماذا رؤوس الشكل المحدودب متعدد الرؤوس هي التـــي تمثل الحلول الممكنة وليس أي نقاط أخرى؟ الإجابة على هذا السؤال بســيطة. خذ النقطة أ التي بداخل منطقة الحل الممكن هذه النقطة تشير إلى أنه يمكـــن إنتاج 100 وحدة من المنتج $س_2$، و150 وحدة من المنتج $س_1$، ومن ثـــم فـــإن الأرباح المحققة في هذه الحالة تبلغ 1400 (4×150+8×100). وإذا نظـــر إلـــى النقطة 2 وهي أحد رؤوس الشكل المحدودب ب فإنها تشير إلـــى إنتـــاج 100 و... أيضا من المنتج $س_2$، وإنتاج 175 تقريبا من المنتج $س_1$، ومن ثـــم فـــإن الأرباح المحققة تبلغ 1600 (4×175+8×100).

وهو ما يعني أن النقطة (2) التي تمثل أحد رؤوس الشـــكل المحـــدودب تسيطر على ما تحتها من نقاط مثل النقطة أ، وعلى ذلك تعتبر النقاط الواقعـــة على حدود الشكل المحدود ب نقاط مسيطرة على جميع النقاط التي تقع بداخل هذا الشكل.

وإذا عدنا مرة أخرى إلى المفاهيم التي تناولناها فـــي الفصـــول الســـابقة الخاصة بتعريف الرأس وهي أي نقطة في الشكل المحدودب لا يمكن التعبـــير عنها في صورة وسط مرجح لأي نقطتين أخريين في الشكل المحدودب. لتبين أن النقاط التي تمثل رؤوس الشكل المحدودب، هي نقاط تسيطر على ما عداها من نقاط أخرى وتقع على حدود الشكل المحدود ب، ومن ثم يقع حل مشـــكلة البرمجة الخطية عند أحد هذه الرؤوس.

إن ما سبق يدعونا إلى اختبار رؤوس الشكل المحدود ب وهـي النقـاط 1،2،3،4،5 ولابد أن يكون الحل المثل لمشكلة البرمجة الخطية في مثالنا يقـع عند أحد هذه الرؤوس، هيا بنا نقوم بهذا الإختبار والذي يتمثل في ببساطة فـي التعويض بقيمة كل رأس في دالة الهدف.

النقطة	القيمة البيانية	قيمة دالة الهدف	الربح
1	(200،0)	ر-4×200+8×0	800-
2	(175، 100)	ر- 4×175+8×100	1600-
3	(75، 175)	ر- 4×75+8×175	1700-
4	(0، 200)	ر- 4×0+8×200	1600-
5	(0، 0)	ر- 4×0+8×0	0 -

إن النتائج السابقة تشير إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية في مثالنا يقع عند الرأس (النقطة3) في الشكل المحدود ب، والتي تنطوي على إنتـاج 75 وحدة من المنتج الأول $س_1$، وإنتاج 175 وحدة من المنتج الثاني $س_2$، لتصـل الأرباح إلى أقصى حد ممكن لها وهو 1700 جنيه. إن المشكلة السابقة مشـكلة لها حل واحد كما هو ملاحظ، ولكن دعنا في بقية هذا الفصل نتناول بعـض المشاكل الأخرى التي قد تعترضنا عند استخدام أسلوب البرمجة الخطية.

مثال (2،8): مشكلة لها أكثر من حل:

أجعل ر أكبر م يمكن:

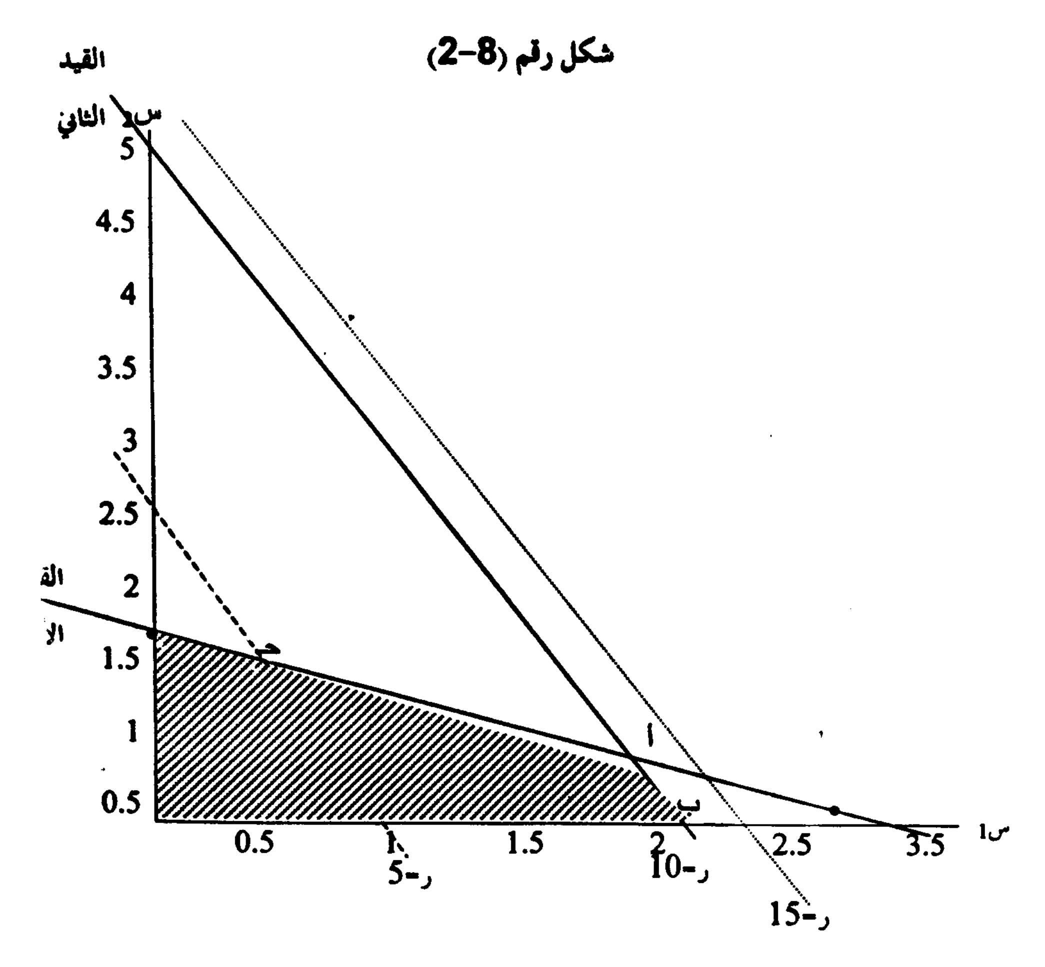
$$ر = 5س_1 + 2س_2$$

$$6س_1 + 12س_2 \geq 18$$

$$10س_1 + 4س_2 \geq 20$$

$$س_1، س_2 \leq صفر$$

يوضح الشكل رقم (8-2) منقطة الحل الممكن الذي تحدده قيود المشكلة.



شكل رقم (8-2)

ويمكن اختيار دالة الهدف والمنطقة الممكنة للحل لتحديد الحـــل الأمثـــل بنفس الأسلوب المتبع في المثال (1).

النقطة	القيمة البيانية	قيمة دالة الهدف	الربح
ب	(0،2)	0×2+2×5-ر	10-
حـ	(1.5 ،0)	1.5×2+0×5 -ر	3-
أ	(0.625 ،1.75)	0.625×2+1.75×5 -ر	10 -

تشير النتائج السابقة إلى وجود أكثر من حل للمشكلة، وهو ما يعنى أنه لا توجد قيمة واحدة لـــ س$_1$، وقيمة واحدة لـــ س$_2$ تجعل قيمة ر أكبر ما يمكن.

وعندما لا يكون للمشكلة حل واحد، يقال أن هناك حلولا بديلة. وهو ما يعني أيضا أنه إذا نظرنا للمشكلة السابقة على إنها تمثل مشكلة خاصة بتشكيلة الإنتاج، فمعنى ذلك أنه يوجد أكثر من طريقة لتجميع عناصر الإنتاج لتحقيق الربح الأمثل.

وتأكيد على ما توصلنا إليه بشأن المشكلة السابقة يمكن رسم دالة الهدف لهذه المشكلة في شكل خط مستقيم بقيم إفتراضية للمتغير ر فإذا كانت دالة الهدف هي:

$$ر = 5\,س_1 + 2\,س_2$$

فعند أي قيمة محددة لـ ر فإن ر $=5\,س_1+2\,س_2$ وعند أي قيمة لـ ر يمكن رسم خط مستقيم لدالة الهدف، وتكون هذه الخطوط متوازية عند القيم المختلفة لـ ر نظرا لأن ميل دالة الهدف هو كمية ثابتة وتعادل $-\frac{1}{2}\,2\left[\frac{-5}{2}\right]$ في حالتنا هذه.[*]

ولتوضيح ذلك إفترض أن الربح هو 5، معنى ذلك أن $5=5س_1+2س_2$

افترض أن $س_1=$ صفر $\quad \therefore س_2=\frac{5}{2}=2.5$

افترض أن $س_2=$ صفر $\quad \therefore س_1=\frac{5}{5}=1$

(*) الميل $= \frac{\text{التغير في } س_1}{\text{التغير في } س_2} = \frac{-\text{معامل } س_1}{\text{معامل } س_2}$ ويمكننا إستنتاج هذه الحقيقة بسهولة عن طريق وضع معادلة الخط المستقيم $أ_1س_1 + أ_2س_2=ب$ على الصورة الآتية:

$س_2 - \frac{ب}{أ_2}\ \frac{أ_1}{أ_2}\ س_1$ ومن ثم $\frac{(د)س_1}{(د)س_2} =$ صفر $- \frac{أ_1}{أ_2} = -\frac{\text{معامل } س_1}{\text{معامل } س_2}$

ومن ثم يمكن تمثيل الخط المستقيم لدالة الهدف على فرض أن الأربـــاح تعادل 5 باستخدام النقطتين (0، 2.5)، (1، 0) كما يوضح ذلك الشـــكل رقــم (2-8)، ولعلك تلاحظ أن خط دالة الهدف عند ربح يعادل 10 ينطبق تماما على الخط الممثل للقيد الثاني، ومعنى ذلك بوضوح أن أي نقطة تقع على الجــز ء أ ب من منطقة الحل الممكن تجعل قيمة ر أكبر ما يمكن. وهو ما يشــير إلــى وجود أكثر من حل للمشكلة.

غير أنه يجب الإشارة إلى أن ليس بالضرورة أن يؤدي تساوي ميل الخط الممثل لدالة الهدف مع ميل الخط الممثل لأحد قيود المشكلة إلى وجود أكـــثر من حل أو عدة حلول بديلة، ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال الآتي:

ر = 2س$_1$ + 2س$_2$ أكبر ما يمكن.

بشرط:

2 س$_2$ ≥ 8

2 س$_1$ + 2 س$_2$ ≤ 2

2 س$_1$ + 4 س$_2$ ≥ 10

س$_1$، س$_2$ ≤ صفر

إن حل هذه المشكلة يتمثل في س$_1$=20 ، س$_2$=0، ر=20 على الرغم مــن أن ميل دالة الهدف يساوي(-1) ميل أحد القيود وهو القيد الثاني. أما الســبب في ذلك فيرجع إلى أن الخط الممثل لدالة الهدف لا يتطابق في وصفه النــهائي مع الحافة التي تمثلها خط القيد الثاني.

تدريب:

ما هي الشروط الضرورية لكي تصبح المشكلة متعددة الحلول؟

مثال (3-7): مشكلة غير محدودة Unbounded Problem

ر= 4 $س_1$ + 4 $س_2$ أكبر ما يمكن

بشرط:

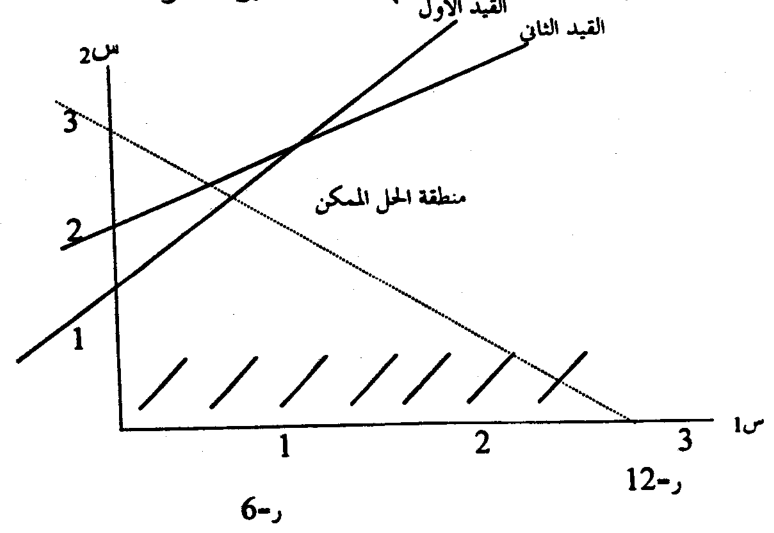
−2 $س_1$ + 2 $س_2$ ≤ 8

−2 $س_1$ + 4 $س_2$ ≤ 8

$س_1$، $س_2$ ≤ صفر

الحل:

يوضح الشكل رقم (3-8) تمثيلا هندسيا لهذه المشكلة، والذي يتضح منـــه أن المجال الممكن (منطقة الحل الممكن) للمشكلة غير محدود.



يتضح أيضا من الشكل (8-3) أن الخط الممثل لدالة الهدف يتم تحريكـــه موازيا لنفسه في إتجاه يتزايد دائما إلى مالا نهاية مما يؤكد على أن قيمة ر لا يمكن تعظيمها، ولذلك يقال في مثل هذه الحالة أن المشكلة ليـــس لـــها حـــل محدود.

والسؤال الآن: ماذا يعنى حل غير محدود؟ الواقع العملي لا يشير إلى مثل هذه الحالة يرجع إلىأن الحل يشير إلى أننا نواجه حالة تتصف بوفرة لانهائية من الموارد – وهذا غير ممكن عمليا– ولذلك فظهور مثل هذه الحالـــة فـــي الواقع العملي يشير إلى ارتكاب خطأ جوهري أثناء صياغة مشكلة البرمجـــة الخطية، ولذلك يجب فحص وتحليل المشكلة مرة أخرى.

غير أنه من الجدير بالإهتمام أن وجود مشكلة ذات مجال مفتوح أو غـــير محدود لا يعنى أنه ليس للمشكلة حل محدود بالضرورة فنفس المشكلة الســـابقة لو كان المطلوب هو جعل ر أقل ما يمكن فسوف نلاحظ أن المجـــال أصبـــح محدودا، ومن ثم أمكن إيجاد حل يحقق هذه الهدف.

مثال (4 7): مشكلة تتصف بحالة عدم الإتساق In Consistence

ر = -2 $س_1$ + 2 $س_2$ أكبر ما يمكن

بشرط:

-4 $س_2$ + 2 $س_2$ ≥ 4

$-2$$س_1$ + 4 $س_2$ ≤ 16

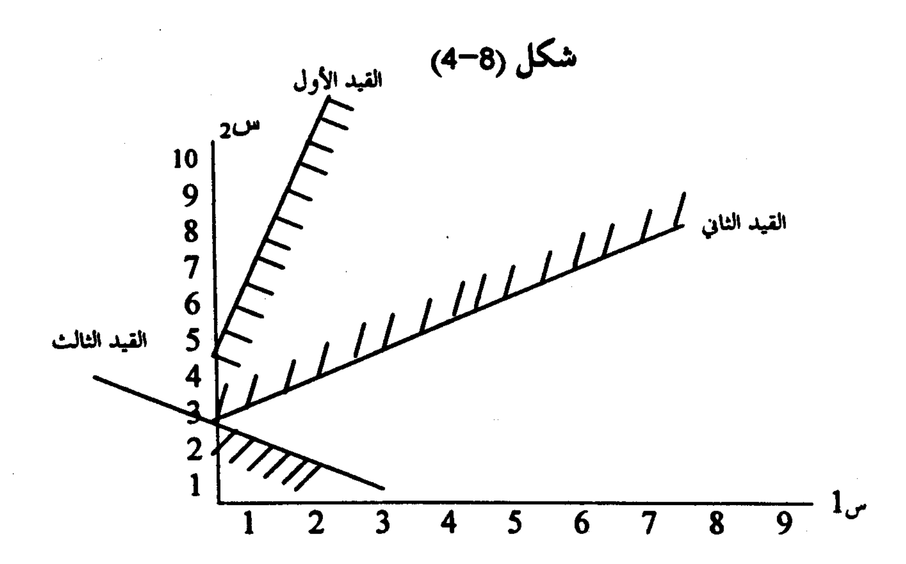
2 $س_1$ + 2 $س_2$ ≥ 10

$س_1$،$س_2$ ≤ صفر

الحل

يوضح الشكل رقم (8–4) أن قيود المشكلة في غير اتساق، ومن ثم يصعب في مثل هذه الحالة تحديد منطقة الحل الممكن، وهو ما يدعونا في مثل هذه الحالات، إلى فحص المشكلة وبياناتها مرة أخرى.

شكل (8–4)



وجبريا يمكن البرهنة على عدم إتساق من المشكلة السابقة. وذلك بضرب المتباينات الثلاثة في 1 ، −1 ، 1 على الترتيب ثم جمعها:

$$-4\,\text{س}_1 + 2\,\text{س}_2 \le 4$$

$$2\,\text{س}_1 - 4\,\text{س}_2 \le -1$$

$$2\,\text{س}_1 + 2\,\text{س}_2 \le 10$$

$$0\,\text{س}_1 + 0\,\text{س}_2 \le -2$$

أي أن صفر ≤ -2 وهذا غير جائز.

مثال (7 5): مشكلة غير ممكنة Infeasible

يطلق على المشكلة أنها غير ممكنة infeasible Problem إذا كانت قيود المشكلة لا تقابل قيد عدم السالبية، أو بمعنى آخر المجال المغلق (مجال أو منطقة الحل الممكن) لا تشبع متطلبات عدم السالبية، والمثال التالي يوضح ذلك:

ر = 3 س$_1$ + 2 س$_2$ أقل ما يمكن

بشرط:

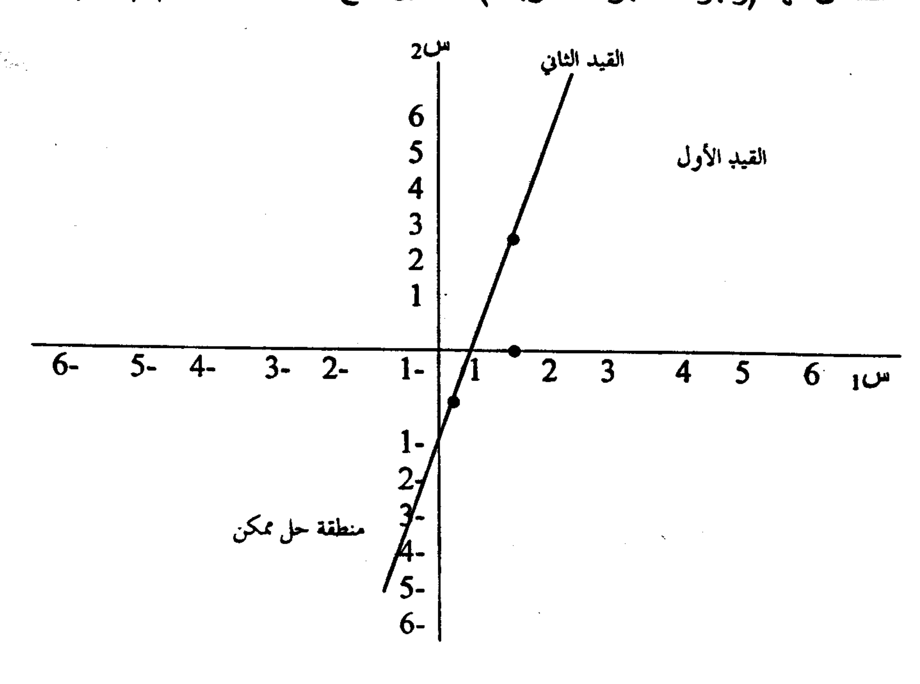
2 س$_1$ − 2 س$_2$ ≤ 0

−6 س$_1$ + 2 س$_2$ ≤ 6

س$_1$، س$_2$ ≤ صفر

الحل

لكي تتبع الهدف من تقديم هذه المشكلة للدارس سوف نقوم بالتمثيل البياني الكامل لها (وجود الأجزاء الأربعة) كما يوضح ذلك الشكل رقم (8-5).



يوضح الشكل رقم (8-5) أن قيود المشكلة متسقة بالرغم من وجود منطقة حل ممكن غير محدودة (مفتوحة) وبالتالي كان يمكن من خلالها الوفاء بحل المشكلة (لاحظ أن المشكلة تدنية للتكاليف) إلا أن وقوع منطقة الحل الممكن في الربع السالب (الربع الرابع) من الشكل (8-5) يشير إلى عدم وفاء أي حل لهذه المشكلة يمكن أن نصل إليه بمتطلبات عدم السالبية، مما يعني أن أي حل يمكن أن تصل إليه سيكون حتما حلا غير ممكن.

مثال (6): **مشكلة معتلة** Degenerate Problem

ر = -2 س$_1$ +2 س$_2$ أكبر ما يمكن.

بشرط:

4 س$_1$ − 2 س$_2$ $\geq$ 8

2 س$_1$ − 4س$_2$ $\geq$ 4

2س$_1$ + 2 س$_2$ $\geq$ 10

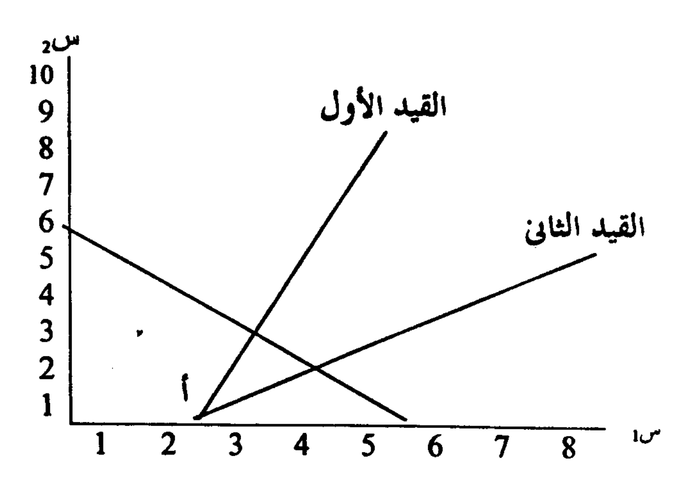
س$_1$ ، س$_2$ $\leq$ 0

الحل

يتمثل الحل الأمثل لهذه المشكلة في:

س$_1$=4 ، س$_2$=0 ، ر=−4

وهو حل يتصف بغرابته، إذا كيف ونحن نسعى إلى تعظيم الأرباح، أن يسفر الحل الأمثل عن أرباح سالبة أو بمعنى آخر خسائر، لقد خاب السعي وضاع الهدف، ليس هذا فحسب ما يمكن أن يقال في هذا المقام أن مراجعة الشكل البياني لهذه المشكلة (شكل رقم 8-6) يسفر عن موقف جديد لم نعهده قبل ذلك، وهو ظهور أحد المتغيرات الأساسية للمشكلة (وهو المتغير س$_2$) بقيمة صفر.



ولكن ماذا يعني أن المتغير س2=صفر، يعني ذلك في الشكل البياني ممكن (6-8) أن منطقة الحل الممكنة لهذه المشكلة ليست سوى نقطة واحدة هي النقطةأ، وهي النقطة التي تحقق عمليا القيود الثلاثة للمشكلة. إن هذا النوع من المشاكل أو المواقف له أهمية كبرى في الفلسفة التي تبنى عليها البرمجة الخطية لما يحمل في طياته من مستعظم الشرر. سوف نعرض له لاحقا بإذن الله.

ثانيا: الحل الرياضي

يمثل أسلوب السمبلكس [1] Simplex Method الأسلوب الرياضى لحل مشاكل البرمجة الخطية ولو أنه ليس الأسلوب الرياضى الوحيد، وإن كان هو أكفأ هذه الأساليب عموما. ولكن قبل أن نعرض بالتفصيل لجوانب هذا الأسلوب.

---

(1) تشير كلمة Simplex في مجال الإرسال التلغرافي لتعني اتباع نظام بمقتضاه ألا يحمل الخط أكثر من رسالة واحدة في وقت واحد. كما تشير ذات الكلمة في مجالات علوم الحساب والإتصالات إلى أحد أنواع الإتصالات وهو الإتصال في إتجاه واحد One direction Communication وتظهر مثل هذه الحالة جلية Communication في العلاقة بين لوحة المفاتيح ووحدة التشغيل المركزية C.P.U والواقع أن المعنى لها الشكل ينطبق على الفلسفة التي يقوم عليها الحل بإستخدام أسلوب السمبلكي والذي بمقتضاه ينطوي الوصول إلى الحل الأمثل على إجتياز عدة حلول أساسية يتم القفز بينها في أقصر طريق ولن يحدث إرتداد مطلقا طالما أن مشكلة البرمجة الخطية غير معتلة كما سيتضح فيما بعد.

يوجد خطوات أساسية ينبغي إنجازها أولاً قبل التعامل رياضياً مع مشكلة البرمجة الخطية، لعل أهم هذه الخطوات على الإطلاق هو تحويل المتباينات في المشكلة إلى معادلات فمثلاً إذا ظهرت أحد المشكلات على الصورة الآتية:

ر=10$س_1$ + 8$س_2$ أكبر ما يمكن

بشرط:

$4 س_1 + 2 س_2 \leq 48$

$2 س_1 + 12 س_2 \leq 48$

$س_1$ ، $س_2$ $\geq$ صفر

إن المشكلة السابقة يمكن وضعها في صورتها المعدلة () لتبدو على الصورة الآتية:

$ر = 10 س_1 + 8 س_2 + 0 س_3 + 0 س_4$

بشرط:

$4 س_1 + 2 س_2 + س_3 = 48$

$2 س_1 + 12 س_2 + 4 س_4 = 48$

$س_1$ ،$س_2$ ،$س_3$ ،$س_4$ $\geq$ صفر

دعنا الآن نحدد الحلول الأساسية لهذه المشكلة – ونعود ونذكر القارئ بأن الحلول الأساسية هي تلك الحلول التي تقع عند رؤوس الشكل المحدودب متعدد الرؤوس الذي يمثل منطقة الحل الممكن. والسؤال الآن كم هو عدد الحلول الأساسية للمشكلة في مثالنا، يمكن تحديد عدد الحلول بإستخدام المعادلة (8-1).

الحد الأقصى لعدد الحلول الأساسية = $\frac{ن!}{م!(ن - م)!}$ ....(8 - 1)

وتنطق المعادلة (8-1) كما يلي:

الحد الأقصى لهذه الحلول الأساسية = $\frac{\text{مفكوك ن}}{\text{مفكوك ن} \times \text{مفكوك الفرق بين م،ن}}$

حيث تمثل (ن) عدد المتغيرات في المشكلة أما (م) فتشـــير إلـــى عـــدد المعادلات (القيود). وعلى ذلك فإن عدد الحلول الأساســـية المتوافــرة لـــهذه المشكلة يعادل عدد الحلول الأساسية= $\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1}$

= $\frac{24}{4}$ = 6 حلول أساسية.

والآن بعد حساب عدد الحلول الأساسية للمشكلة. نحـــاول تخليـــق هـــذه الحلول، ثم إختيار دالة الهدف عند كل حل، ومن ثم سوف يكون الحل الأمثـــل هو الذي يحقق أقصى منفعة في دالة الهدف.

ويوضح الجدول رقم (8-1) الحلول الأساسية للمشكلة، والتي تمت عـــن طريق إفتراض وجود متغيرين معا يساويان الصفر في لحظـــة معينـــة، ثـــم التعويض في قيود المشكلة لمعرفة المتغيرين الآخرين.

جدول (8-1)

م	المتغيرات التي افترضنا أنها تساوي صفر	المتغيرات الأخرى وتمثل متغيرات أساسية	الحلول قيم المتغيرات الأساسية	قيمة دالة الهدف
1	$س_1$ ، $س_2$	$س_3$ ، $س_4$	48 ، 48	0
2	$س_1$ ، $س_3$	$س_2$ ، $س_4$	24 ، 240 -	حل غير ممكن [*]
3	$س_1$ ، $س_4$	$س_2$ ، $س_3$	4 ، 20	16
4	$س_2$ ، $س_3$	$س_1$ ، $س_4$	12 ، 24	96
5	$س_2$ ، $س_4$	$س_1$ ، $س_3$	24 ، -48	حل غير ممكن
6	$س_3$ ، $س_4$	$س_1$ ، $س_2$	$\frac{120}{11}$ ، $\frac{24}{11}$	$63\frac{3}{11}$

يتضح من الجدول رقم (8-1) أن الحل الأمثل للمشكلة السابقة يتمثل في إنتاج $\frac{120}{11}$ وحدة من المنتج $س_1$ ، $\frac{24}{11}$ وحدة من المنتج $س_2$ حيث تبلغ أقصى أرباح $63\frac{3}{11}$ جنيها هذا إذا نظرنا للمشكلة السابقة على إنها مشكلة تتعلق بتحديد التشكيلة المثلى للمنتجات. وبعد هذا العرض دعنا نقيم الموقف من خلال أسلوب تحديد الحلول الأساسية، ونحيل القارئ للإجابة على هذه التساؤل: ما هو عدد الحلول الأساسية لمشكلة مكونة من خمسين متغيرا، وخمسة وعشرون معادلة، وهي مشكلة من زاوية الواقع متواضعة بالمقارنة

---

[*] لقد توصلنا إلى قيم الحل غير الممكن 24 ، -240 كما يلي:

طالما أن قيمة $س_1$ ، $س_3$ تساوي صفر، فإنه بالتعويض في القيد الأول للمشكلة

$$4س_1 + 2س_2 + س_3 = 48$$

$$\therefore 2س_2 = 48 \qquad \therefore س_2 = 24$$

وبالتعويض عن قيمة $س_2$ في القيد الثاني للمشكلة:

$$\therefore 2س_1 + 12س_2 + س_4 = 48$$

$$صفر + 12 \times 24 + س_4 = 48$$

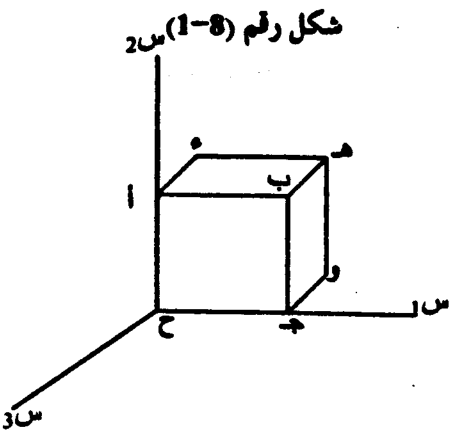
$$\therefore س_4 = -240$$

وغني عن البيان أنه إذا كان أحد إحداثي نقطة ما سالبا فإن ذلك يتعارض وفكرة عدم السالبية ولذلك يصبح الحل غير الممكن.

بالمشاكل العملية، إن عدد الحلول الأساسية لهذه المشكلة هو ببساطة ناتج المعادلة $\frac{50!}{25!(50-25)!}$، ولسنا مبالغين إذا قلنا أن الناتج هو رقم قد يناطح السحاب، ويطاول عنان السماء ومن ثم فإن أسلوب الحلول الأساسية هو أسلوب غير عملي، وإن كان ذا فائدة أكاديمية حيث أنه في ظل أسلوب السمبلكس سوف نبدأ بواحد من هذه الحلول الأساسية، ثم نقفز نحو الحل الأمثل من أقصر الطرق، غير مضطرين إلى إختيار كل الحلول الأساسية، من هنا جاءت كفاءة أسلوب السمبلكس في التعامل مع مشكلات البرمجة الخطية وترجع بذلك ملكاً على ما عداه من أساليب وطرق أخرى.

دعنا الآن نتناول الخطوط العريضة لأسلوب السمبلكس والذي ينطوي على أن الحل الأمثل هو أحد الحلول الأساسية للمشكلة، والوصول وأن الوصول لهذا الحل لا يتطلب بالضرورة إختيار كافة الحلول الأساسية، دعنا نوضح ذلك من خلال الشكل رقم (8-1).

شكل رقم (8-1)



يشير الشكل (8-1) إلى تمثيل الهندسي لمشكلة مكونة من ثلاثة متغيرات لذلك جاء في شكل ثلاثي الأبعاد. ويتحدد المجال المسموح به (مجال الحل الممكن) من الشكل ع،جـ،و ،هـ،أ،د وتنطوي إجراءات أسلوب السمبلكس على التعرف على النقط المجاورة لنقطة الحل الحالي وإختيار هذه النقاط

لإختيار أفضل نقطة منها، والنقطة المجـاورة هـي إحـدى رؤوس الشـكل المحدودب والتي تربط بين النقطتين إحدى حواف مجال الحل الممكـن. والآن إفترض في الشكل رقم (8-1) أننا عند النقطة ح هذه النقطة تشير إلى عـدم حل المشـكلة، إذ أن المتغـيرات الأساسـية أو الهيكليـة للمشـكلة وهـي س1،س2،س3 تساوي صفراً عند النقطة ح. وسوف نفترض أيضاً أن هـي الحل الأمثل لهذه المشكلة يتمثل النقطة هـ. ومعنى ذلك أن أسلوب السمبلكس قد يقودنا إلى الوصول إلى الحل الأمثل من خلال عدة مسارات Routs منـها على سبيل المثال السمار ح،جـ،و،هـ أو المسار ح،جـ،ب، هـ أو المسـار ح،أ،ب،هـ أو المسار ح،أ،د،هـ. حيث يطلق علـى النقـلات إلـى النقـاط المجاورة اسم الاستقطاب Pivoting. ويلاحظ أنه لا يمكن الوصول إلى الحل الأمثل مثلاً عن طريق مسار مثل أ،ب،هـ إذ أن النقطة ب ليسـت مجـاورة للنقطة ح. حقاً فإن الوصول إلى الحل الأمثل من خلال هـذا المسـار إنمـا يختصر على ما يبدو ظاهرياً الجهد المبذول لحـل المشـكلة وقـد أجريـت محاولات في هذا الشأن- غير أنه قد ثبت أنها لا توفر أو توفر جهداً قليلاً جداً من الزمن المستغرق لحل المشكلة. والحق يقال أن استخدام السـمبلكس إلـى القفز إلى النقاط المجاورة في سبيل الوصول للحل الأمثـل يمثـل الخاصيـة الأساسية لهذا الأسلوب.

والآن دعنا نتناول حلاً لأحد المشكلات بإستخدام أسلوب السمبلكس.

(1) **مشكلة تعظيم الأرباح:**

مثال (13):

عظم دالة الهدف

$$ر = 4 س_1 + 3 س_2$$

في ظل القيود:

$4س_1 + 2س_2 \le 10$

$2س_1 + 3/2س_2 \le 8$

$س_2 \le 6$

$س_1$ ، $س_2 \ge 0$ (قيد عدم السالبية)

الحل

خطوة (1) : تحويل المتباينات إلى معادلات

لتحويل المتباينات إلى معادلات يستلزم الأمر تحديد ما يلي:

أ) ما هو نوع المتباينات في المشكلة؟

المتباينات من النوع أقل من أو يساوي (≤).

ب) كيف يتم تحويل هذا النوع من المتباينات إلى معادلات؟

يتم ذلك بإضافة متغير عاطل إلى كل متباينة وذلك لتحويلها إلى معادلة.

ج) هل تظهر المتغيرات العاطلة في دالة الهدف؟

نعم لابد أن تظهر المتغيرات العاطلة في دالة الهدف للمشكلة.

د) ما قيمة المتغيرات العاطلة في دالة الهدف؟

تأخذ المتغيرات العاطلة معاملات صفرية في دالة الهدف.

هـ) ما هو عدد المتغيرات العاطلة في هذه المشكلة؟

يجب إضافة 3 متغيرات عاطلة في هذه المشكلة لأن المشكلة تحتوى على 3 متباينات من النوع أقل من أو يساوي.

إذن لتحويل المتباينات السابقة إلى معادلات يجب:

• إضافة المتغير العاطل $س_3$ إلى المتباينة الأولى.

• إضافة المتغير العاطل $س_4$ إلى المتباينة الثانية.

• إضافة المتغير العاطل $س_5$ إلى المتباينة الثالثة.

وبالتالي تصبح المعادلات على الصورة الآتية:

$4س_1 + 2س_2 + س_3 = 10$

$2س_1 + 8/3 + س_4 = 8$

$س_2 + س_5 = 6$

$س_1$ ، $س_2 \leq$ صفر (قيد عدم السالبية)

خطوة (2) : توجيه المشكلة نحو الحل المبدئي:

يتم في هذه الخطوة تنفيذ ما يلي:

1-إظهار المتغيرات العاطلة بمعاملات صفرية في دالة الهدف أي أن دالة الهدف تصبح على الصورة الآتية:

عظم ص = $4 س_1 + 3 س_2 + 0 س_4 + 0 س_5$

2- إظهار جميع المتغيرات العاطلة في جميع القيود بشرط أن المتغيرات العاطلة الأخرى التي لا تخص قيد معين تكون ذات معامل يساوي صفرا. أي أن قيود المشكلة تظهر على الصورة الآتية(*)؟

$4س_1 + 2س_2 + س_3 + 0 س_4 + 0 س_5 = 10$

(*) حاول دائما أن تكون الكسور في مشكلة السمبلكس كسور اعتيادية وليست عشرية، حيث في الكسور الاعتيادية أدق حسابيا.

2 س$_1$ + 8/3 س$_2$ + 0 س$_3$ + 0 س$_5$ = 8

0 س$_1$ + س$_2$ + 0 س$_3$ + 0 س$_4$ + س$_5$ = 6

س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

خطوة (3) : تحديد الحل المبدئي (جدول السمبلكس)

في هذه الخطوة يجب القيام بالآتي:

1- تصميم جدول السمبلكس والذي يتكون من عدة أعمدة هي:

- **عمود يمثل ربح الوحدة.**
- **عمود يمثل متغيرات الحل.**
- **عمود يمثل قيم الحل.**
- **عدد من الأعمدة يساوي عدد المتغيرات في دالة الهدف.**

2- متغيرات الحل التي تظهر في جدول السمبلكس للحل المبدئي هي المتغيرات العاطلة للمشكلة والمتغيرات الوهمية (إن وجدت).

3- يتم ملء جدول السمبلكس بقيم القيود للمشكلة وبناء على ما سبق يظهر جدول السمبلكس للحل المبدئي كما يلي:

يظهر جدول السمبلكس للحل المبدئي كما يلي:

ربح الوحدة م ز	متغيرات الحل	قيم الحل	متغيرات دالة الهدف وقيمتها				
			0 س$_3$	0 س$_4$	0 س$_5$	4 س$_1$	3 س$_2$
0	س$_3$	10	1	0	0	4	2
0	س$_4$	8	0	1	0	2	3/8
0	س$_5$	6	0	0	1	0	0
ل ز		0	0	0	0	0	0
م ز – ل ز			0	0	0	4	3

ملاحظات على الجدول السابق:

1- لاحظ أن المتغيرات الداخلة في الحل ($س_3$،$س_4$،$س_5$) تكـــون مصفوفـــة الوحدة، وهذه قاعدة يجب توافرها في جدول السمبلكس في أي مرحلة من مراحل الحل وتوافرها يعني أننا نسير بشكل صحيح نحو حل المشكلة.

2- واضح من جدول الحل المبدئي أن حــــل المشــكلة غــير عملـــي، لأن الربح=صفر كما أنه لن تنتج أي من الوحـــدات مـــن $س_1$، أو $س_2$. إذن يجب تطوير الحل المبدئي، وذلك بأن نقوم بإخراج أحد المتغيرات العاطلة وإحلال متغير أساسي ($س_1$ أو $س_2$) محله.

3- ما هو المتغير الأساسي المؤهل لدخول الحل؟

هو المتغير صاحب أكبر قيمة في صف م ز - ل ز (الصف الأخير) أي أنه $س_1$.

4- ما هو المتغير العاطل المؤهل للخروج من الحل؟

للإجابة على هذا السؤال ينبغي القيام بالآتي.

إقسم عمود قيم الحل على قيم عمود المتغير المؤهل لدخول الحل كالآتي:

عمود قيم الحل ÷ قيم عمود $س_1$.

$س_3$ = 10 ÷ 4 = 2.5

$س_4$ = 8 ÷ 2 = 4

$س_5$ = 6 ÷ 0 = لا يجوز.

يتم إختيار المتغير صاحب أقل قيمة موجبة ($س_3$).

5- ينبغي تحديد رقم مهم للغاية في جدول السمبلكس السابق هذا الرقم يسمى رقم البؤرة Pivot لأننا سوف نستخدمه في تكوين جدول سمبلكس جديد.

ما هو رقم البؤرة؟ هو الرقم الناتج من تقاطع عمود المتغير المؤهل لدخول الحل س1 مع صف المتغير المؤهل للخروج من الحل (س3).

إذن رقم البؤرة هو 4 (إرجع إلى الجدول ستجد الرقم موضوع بين دائرة).

هل يمكن أن نصل إلى الحل الأمثل في جدول المبدئي؟ لا: لأن جدول الحل المبدئي يتضمن المتغيرات غير الأساسية للمشكلة.

كيف نتأكد من أننا وصلنا إلى الحل الأمثل؟

إذا ظهر صف م ز – ل ز بقيم صفرية أو سالبة نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

لاحظ أن ذلك لم يتحقق في جدول الحل المبدئي للمشكلة التي بين يدينا، لذلك يجب أن نصمم جدول حل جديد.

خطوة (4) تكوين جدول سمبلكس جديد (جدول رقم 2).

كيف يمكن تكوين جدول سمبلكس جديد؟

يتم ذلك بإتباع الخطوات الآتية.

1- يتم تحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح.

" في حالة ما إذا كان رقم البؤرة = 1 نتركه كما هو".

ويتم تحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح بقسمة قيم الصف الذي يقع فيه رقم البؤرة على قيمة رقم البؤرة. وذلك كما يلي:

صف $س_1$ = $\frac{10}{4}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{0}{4}$، $\frac{0}{4}$، $\frac{4}{4}$، $\frac{2}{4}$

= 2.5 ، $\frac{1}{4}$، 0 ، 0 ، 1 ، $\frac{1}{2}$

2- تحويل أي أرقام في عمود رقم البؤرة إلى صفر (سواء كانت تحت رقم البؤرة أو أعلاه).

" إذا كانت بعض الأرقام = صفر نتركها كما هي".

ويتم ذلك من خلال المعادلة الآتية:

قيم الصف الجديد =	قيم الصف القديم	− (الرقم المطلوب تحويله إلى صفر × القيم الجديدة لصف البؤرة)

قيم صف $س_4$ الجديد

$$8 - (2.5 \times 2) = 3$$

$$0 - (\frac{1}{4} \times 2) = -\frac{1}{2}$$

$$1 - (0 \times 2) = 1$$

$$0 - (0 \times 2) = \text{صفر}$$

$$2 - (1 \times 2) = \text{صفر}$$

$$\frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} \times 2\right) = \frac{5}{3}$$

بذلك يمكن تكوين جدول السمبلكس الجديد، ولاحـــظ جيـــدا أن المتغــــير العاطل $س_3$ لم يظهر في متغيرات الحل وسيحل محله المتغير الأساسي $س_1$.

ربح الوحدة م ز	متغيرات الدالة الهدف وقيمتها						
	متغيرات الحل	قيم الحل	0 $س_3$	0 $س_4$	0 $س_5$	4 $س_1$	3 $س_2$
4	$س_1$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$
0	$س_4$	3	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$س_5$	6	0	0	1	0	1
ل ز		10	1	0	0	4	2
م ز − ل ز			1-	0	0	0	1

ملاحظات على الجدول السابق:

1- عمود قيم الحل يشير إلى أنه يجب إنتاج $\frac{5}{2}$ وحدة من المتغـــير $س_1$ وسوف نصل إلى أرباح تبلغ 10 جنيه في هذه الحالة.

الأرباح (10جنيه) حصلنا عليها كالآتي ($\frac{5}{2}\times4+0\times3+0\times6$)

2- يتم تحديد قيم صف $ل_ز$ كالآتي:

اضرب عمود ربح الوحد × أعمدة متغيرات دالة الهدف.

فمثلا قيمة $ل_ز$ تحت المتغير $س_3$ =1 حصلنا عليها كالآتي:

$$\left[1=0\times 0+\frac{1}{2}-\times 0+\frac{1}{4}\times 4\right]$$

وهكذا مع بقية المتغيرات في جدول السمبلكس.

3- قيم صف $م_ز - ل_ز$ يتم الحصول عليها كالآتي:

قيم معادلات دالة الهدف – قيمة صف $ل_ز$

قيم صف $م_ز - ل_ز$

$$\begin{cases} 0 - 1 = -1 \\ 0 - 0 = 0 \\ 0 - 0 = 0 \\ 4 - 4 = 0 \\ 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

4- هل يمثل الحل الذي توصلنا إليه في الجدول السابق حل أمثل؟

لا: لأن قيم صف $م_ز - ل_ز$ ليست كلها صفرية أو سالبة لذلك ينبغي إعداد جدول سمبلكس جديد.

خطوة (5): تكوين جدول السمبلكس الجديد (جدول رقم 3)

حيث يتم إتباع نفس الإجراءات السابقة في خطوة (4).

1- تحديد المتغير المؤهل لدخول الحل.

المتغير هو $س_1$ صاحب أكبر قيمة موجبة في صف $م_ز - ل_ز$

2- تحديد المتغير المؤهل للخروج من الحل كما يلي:

$$س_1 = \frac{5}{2} \div \frac{1}{2} = 5$$

$$س_4 = 3 \div \frac{5}{3} = \frac{9}{5}$$

$$س_5 = 6 \div 1 = 6$$

إذن المتغير المؤهل للخروج من الحل هو $س_4$ صاحب أقل قيمة موجبة.

رقم البؤرة الجديد هو $\frac{5}{3}$ الناتج من تلاقي عمود المتغير المؤهل لدخـــول الحل ($س_2$) وصف المتغير المؤهل للخروج من الحل ($س_4$).

3- تحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح.

وذلك بقسمة قيم صف $س_4$ على $\frac{5}{3}$ وتمثل القيم الناتجة من عملية القســمة صف $س_2$ (المتغير الذي دخل الحل) ويتم ذلك كالآتي:

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}، \frac{0}{\frac{5}{3}}، \frac{0}{\frac{5}{3}}، \frac{1}{\frac{5}{3}}، \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{5}{3}}، \frac{3}{\frac{5}{3}} = س_2$$

$$1،0،0، \frac{3}{5}، \frac{3}{10}-، \frac{9}{5} =$$

4- تحويل الأرقام التي في عمود البؤرة إلى صفر.

تحويل الرقم $\frac{1}{2}$ إلى صفر كالآتي:

صف س1 الجديد	=	صف س1 القديم	−	الرقم المطلوب تحويله إلى صفر	×	صف س2 الجديد

$$\frac{8}{5} = \left(\frac{9}{5} \times \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} =$$

$$\frac{2}{5} = \left(\frac{3-}{10} \times \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

$$\frac{3-}{10} = \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right) - 0$$

$0 - \left(0 \times \frac{1}{2}\right) =$ صفر

$1 - \left(0 \times \frac{1}{2}\right) = 1$

$\frac{1}{2} - \left(1 \times \frac{1}{2}\right) =$ صفر

ب- تحويل الرقم (1) إلى صفر كما يلي:

صف س5 الجديد = صف س5 القديم − (الرقم المطلوب تحويله إلى صفر × صف س2 الجديد)

$= 6 - \left(\frac{9}{5} \times 1\right) = \frac{21}{5}$

$= 0 - \left(\frac{-3}{10} \times 1\right) = \frac{3}{10}$

$0 - \left(\frac{3}{5} \times 1\right) = \frac{-3}{5}$

$= 1 - (0 \times 1) = 1$

= صفر − $(0 \times 1) = 0$

$= 1 - (1 \times 1) = 0$

جدول السمبلكس رقم (3)

متغيرات دالة الهدف

حدة م ز	متغيرات الحل	قيم الحل	متغيرات دالة الهدف وقيمتها				
			0	0	0	4	3
			س3	س4	س5	س1	س2
4	س1	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0	1	صفر
3	س2	$\frac{9}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	0	0	1
0	س5	$\frac{21}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	0
ل ز		11.8	$\frac{7}{10}$	صفر	صفر	4	3
– ل ز			$-\frac{7}{10}$	صفر	صفر	صفر	صفر

يلاحظ على صف م ز – ل ز أنه يتضمن قيم سالبة وصفرية فقط
تالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل للمشكلة.

الحل الأمثل هو:

إنتاج 1.6 وحدة $\left(\frac{8}{5}\right)$ من المنتج س1

إنتاج 1.8 وحدة $\left(\frac{9}{5}\right)$ من المنتج س2

أقصى ربح هو 11.8 جنيه.

) مشكلة تدنية التكاليف:

قدمنا في المثال السابق الصورة الأساسية لطريقة السمبلكس لحل مشكلة
رمجة الخطية، ولقد اقتصرنا في المثال السابق أيضا على المتباينات من

النوع الأول (أي ≤). ولكن ماذا لو بدت مجموعة القيود لأحـــد المشــكلات على نحو النوع الثاني من المتباينات (أي ≥) كما في المثال الآتي:

مثال (8-ع):

اجعل ر أقل ما يمكن.

$$\text{ر} = 6\,\text{س}_1 + 4\,\text{س}_2$$

$$3\,\text{س}_1 + 2\,\text{س}_2 \geq 12$$

$$\frac{1}{2}\,\text{س}_1 + \text{س}_2 \geq 4$$

$$\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2 \geq 0$$

هنا لا نستطيع القول بأن الحل المبدئي متاح بيسر، ويتطلب تحديد الحـــل المبدئي لمثل هذه المشكلة إضافية متغيرات وهمية Artificial Variables، وهي وهمية لأنه لا علاقة لها بالمشكلة الأصلية، وينتهي دورها بعد أن تلعـب دورا محدودا في عملية حل المشكلة، ومن ثم يتحتم الخلاص منها بعد ذلـــك. لذلك دعنا الآن نتعرف على كيفية تحويل المتباينات من النوع الثاني (≥) إلى معادلات، ومن ثم استكمال حل المشكلة.

الخطوة الأولى: تحويل المتباينات إلى معادلات.

لتحويل المتباينات إلى معادلات يستلزم الأمر تحديد ما يلي:

أ) ما هو نوع المتباينات في هذه المشكلة؟

المتباينات من النوع الثاني (أكبر من أو يساوي).

ب) كيف يمكن تحويل هذا النوع من المتباينات إلى معادلات؟

يتم ذلك من خلال إضافة متغير وهمي وطرح متغير فائض.

ج) هل تظهر المتغيرات الوهمية والفائضة في دالة الهدف؟

نعم لابد وأن تظهر المتغيرات الوهمية والفائضة في دالة الهدف.

د) ما هي قيمة المتغيرات الوهمية في دالة الهدف؟ .

تأخذ المتغيرات الوهمية قيمة كبيرة جدا وموجبة سنرمز لها بالرمز "م".

هـ) ما هي قيمة المتغيرات الفائضة في دالة الهدف؟

تأخذ المتغيرات الفائضة قيمة صفر في دالة الهدف.

و) هل تطرح المتغيرات الفائضة في دالة الهدف كما هو الحال بالنسبة للقيود؟

لا، بل تضاف أي يسبقها إشارة + في دالة الهدف.

إذن لتحويل المتباينات الخاصة بالمشكلة السابقة إلى معادلات يجب:

- **إضافة المتغير الوهمي $س_3$ إلى المتباينة الأولى.**
- **طرح المتغير الفائض $س_4$ من المتباينة الأولى..**
- **إضافة المتغير الوهمي $س_5$ إلى المتباينة الثانية..**
- **طرح المتغير الفائض $س_6$ من المتباينة الثانية..**

ومن ثم تصبح معادلات المشكلة السابقة على الصورة الآتية:

$3 س_1 + 2 س_2 + س_3 - س_4 = 12$

$0.5 س_1 + س_2 + س_5 - س_6 = 4$

$س_1$ ، $س_2 \geq 0$ (قيد عدم السالبية).

خطوة (2) توجيه المشكلة نحو الحل المبدئي:

يتم في هذه الخطوة تنفيذ ما يلي:

1- إظهار المتغيرات الفائضة بمعاملات صفرية في دالة الهدف، وكذلك إظهار المتغيرات الوهمية بمعاملات م.

أي أن دالة الهدف تصبح على الصورة الآتية:

ص = 6 س$_1$ + 4 س$_2$ + م س$_3$ + 0 س$_4$ + م س$_5$ + 0 س$_6$

2- إظهار المتغيرات الوهمية والفائضة في جميع قيود المشكلة وبشرط أن المتغيرات التي لا تخص قيد معين تظهر بمعاملات صفرية أي أن قيود المشكلة تظهر على الصورة الآتية:

3 س$_1$ + 2 س$_2$ + س$_3$ – س$_4$ + 0 س$_6$ = 12

0.5 س$_1$ + س$_2$ + 0 س$_3$ + 0 س$_4$ + س$_5$ – س$_6$ = 4

س$_1$ ، س$_2$, 0

خطوة (3) : تحديد الحل المبدئي "حول جدول السمبلكس رقم (1)".

يبدأ الحل المبدئي بالمتغيرات العاطلة والوهمية، ولا يتضمن أبدا متغيرات فائضة أو أساسية، ومن ثم يظهر جدول السمبلكس متضمنا الحل المبدئي على الصورة الآتية:

جدول الحل المبدئي

تكلفة الوحدة الواحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	6 س$_1$	4 س$_2$	م س$_3$	م س$_5$	0 س$_4$	0 س$_6$
م	س$_3$	12	3	2	1	0	1-	0
م	س$_5$	4	0.5	1	0	1	0	1
ل$_ز$		16	3.5م	3م	م	م	–م	–م
م$_ز$ – ل$_ز$			6-3.5م	4-3م	0	0	م	م

- هل الجدول السابق يمثل الحل الأمثل؟
- لا، وذلك لسببين:

1- صف $م_ز - ل_ز$ يحتوي على قيم سالبة.

2- لا يمكن أن يحتوي الحل الأمثل على متغيرات وهمية. وإلا أصبح حل وهمي " وهذا مستحيل".

مما سبق يجب تكوين جدول سمبلكس جديد. ونتساءل:

س: ما هو المتغير المؤهل لدخول الحل؟

المتغير هو $س_1$ (صاحب أكبر رقم أمامه إشارة سالب في صف $م_ز - ل_ز$).

س: ما هو المتغير المؤهل للخروج من الحل؟

ج) يتم تحديد المتغير المؤهل للخروج من الحل كالآتي:

متغيرات الحل المبدئي	=	عمود قيم الحل	÷	قيم عمود التغير المؤهل لدخول الحل

$س_3 = 12 \div 3 = 4$

$س_5 = 4 \div 0.5 = 8$

المتغير المؤهل للخروج من الحل هو $س3$ (صاحب أقل قيمة موجبة).

س: ما هو رقم البؤرة؟

ج) هو الرقم 3 الناتج من تقاطع عمود المتغير المؤهل لدخول الحل مـــع صف المتغير المؤهل للخروج من الحل.

الخطوة (4): تكوين جدول سمبلكس جديد.

1- تحويل رقم البؤرة إلى 1 صحيح.

يتم ذلك بقسمة رقم البؤرة على رقم البؤرة كالآتي:

صف $س_1$ الجديد = $\frac{12}{3}$، $\frac{3}{3}$، $\frac{2}{3}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{0}{3}$، $\frac{-1}{3}$، $\frac{0}{3}$

= 4، 1، $\frac{2}{3}$، $\frac{1}{3}$، صفر، $\frac{1}{3}$، صفر،

2- تحويل الرقم أسفل البؤرة (0.5) إلى صفر كالآتي:

صف $س_5$ الجديد	=	صف $س_5$ القديم	−	الرقم المطلوب تحويله إلى صفر	×	صف $س_1$ الجديد

$$4 - (4 \times 0.5) = 2$$

0.5 − (1× 0.5) = صفر

$$1 - \left(\frac{2}{3} \times 0.5\right) = \frac{2}{3}$$

$$0 - \left(\frac{1}{3} \times 0.5\right) = -\frac{1}{6}$$

$$1 - \left(-\frac{1}{3} \times 0.5\right) = \frac{1}{6}$$

−1 − (صفر × 0.5) = −1

تكلفة الوحدة الواحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	6 س$_1$	4 س$_2$	م س$_3$	م س$_5$	0 س$_4$	0 س$_6$
6	س$_1$	4	1		صفر	−		0
م	س$_5$	2	صفر		−	1		− 1 −
ل$_ز$		24 + 2م	6	$4 + \frac{2}{3}$ م	م − $\frac{1}{6}$ م	م	$- 2 + \frac{1}{6}$ م	م
ل$_ز$ − م$_ز$			− $\frac{2}{3}$ م	$\frac{5}{6}$ م − 2	صفر	$2 - \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ م	م

س: هل الحل السابق هو أمثل؟

ج: لا لأن صف م ز − ل ز ما زال به قيم سالبة

س: ما هو المتغير المؤهل لدخول الحل؟

ج: هو المتغير س2 (صاحب أكبر رقم أمامه إشارة سالبة في صف م ز − ل ز).

س: ما هو المتغير المؤهل للخروج من الحل؟

ج: يمكن تحديد كالآتي:

س$_1$ = $4 \div \frac{2}{3} = 6$

س$_5$ = $2 \div \frac{2}{3} = 3$

إذن المتغير المؤهل لدخول الحل هو س$_5$ صاحب أقل قيمة.

س: ما هو رقم البؤرة؟

ج: هو الرقم $\frac{2}{3}$ الناتج من تقاطع عمود المتغير المؤهل لدخول الحل مع صف المتغير المؤهل للخروج من الحل.

الخطوة (5): تكوين جدول سمبلكس جديد:

1- تحويل رقم البؤرة إلى 1 صحيح.

يتم ذلك بقسمة صف س5 على $\frac{2}{3}$ (رقم البؤرة) حيث ينتج صف جديد من القيم هو صف س2 الجديد.

صف س2 الجديد =

$$\frac{-1}{\frac{2}{3}} ، \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} ، \frac{-1}{\frac{2}{3}} ، \frac{\frac{-1}{6}}{\frac{2}{3}} ، \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} ، \frac{\text{صفر}}{\frac{2}{3}} ، \frac{2}{\frac{2}{3}}$$

∴ صف س2 الجديد = 3،0،1، $\frac{-1}{4}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{2}$

2- تحويل صف $\frac{2}{3}$ أعلى البؤرة إلى صفر.

صف س1 الجديد	=	صف س1 القديم	-	الرقم المطلوب تحويله إلى صفر	×	صف س2 الجديد

$$2 = \left(3 \times \frac{2}{3}\right) - 4 =$$

$$1 = \left(0 \times \frac{2}{3}\right) - 1$$

$$\text{صفر} \quad = \left(1 \times \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$1- = \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right) - 0$$

$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) -$$

$$1- = \left(\frac{2-}{3} \times \frac{2}{3}\right) - 0$$

تكلفة الوحدة الواحدة م ز	متغيرات الحل	قيم الحل	6 $س_1$	4 $س_2$	م $س_3$	م $س_5$	0 $س_4$	0 $س_6$
6	$س_1$	2	1	0	$\frac{7-}{12}$	1-	$\frac{2-}{3}$	1-
4	$س_2$	3	0	1	$\frac{1-}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-}{2}$
$ل_ز$		24	6	4	2.5	0	3-	0
$م_ز - ل_ز$			0	0	م-2.5	م	3	0

الجدول السابق هو جدول الحل الأمثل لأن صف م ز – ل ز كـل قيمـة موجبة أو صفر.

الحل الأمثل إنتاج وحدتين من $س_1$

إنتاج 3 وحدات من $س_2$

أقصى ربح 24 جنيه.

إن الأسلوب الذي إتبعناه في حل مشكلة تدنية التكاليف السابقة يطلق عليـه طريقة م الكبرى أو طريقة م لتشارلز وتنطوى هذه الطريقة على أنه إذا كـان

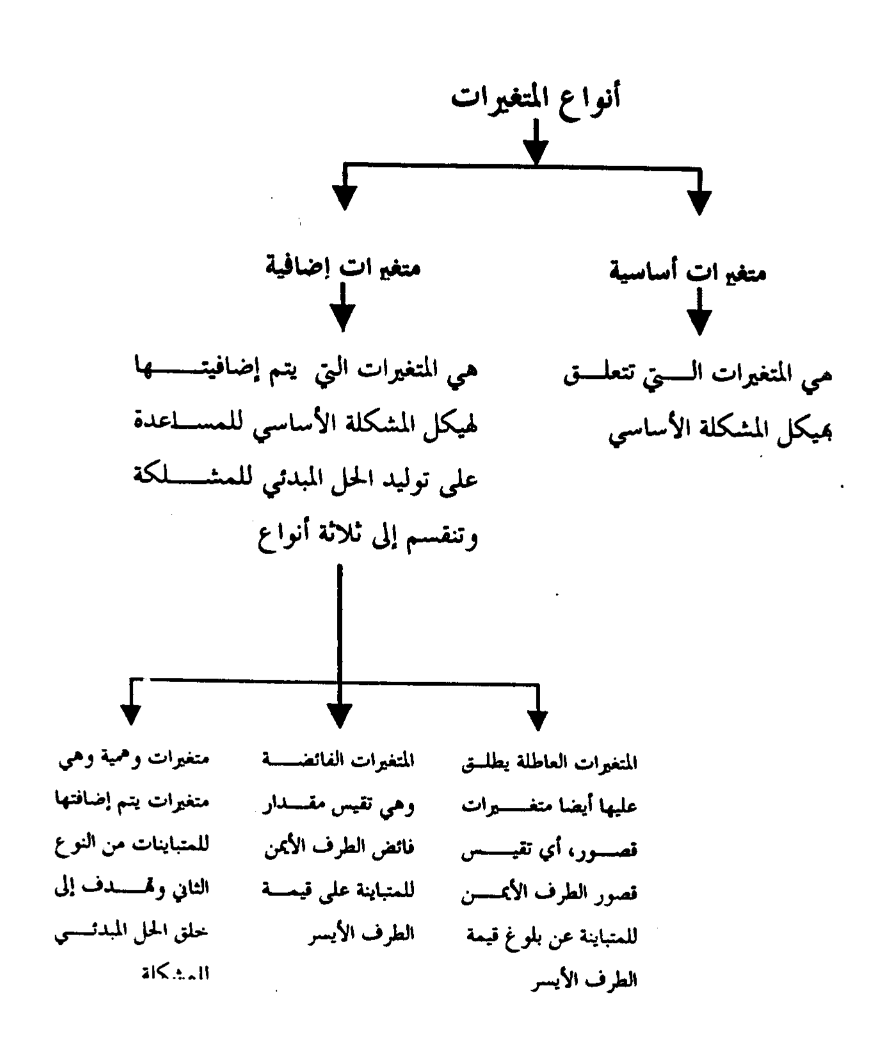
يتضمن متغيرات وهمية [1]. فلماذا لا نجعل وجودها أمرا مرغوب فيه، إلى الحد الذي يجعل أسلوب السمبلكس بخطواته المعتادة يلفظ هذه المتغيرات من الحل، ولكي يتكفل أسلوب السمبلكس بذلك تشير هذه الطريقة إلى جعل معامل المتغيرات الوهمية في دالة الهدف ذا قيمة سالبة كبيرة جدا يشار إليها بـ -م [*]. ومن هنا اصطلح على تسميتها بهذا الأسم.

أما الأسلوب الآخر الذي يمكن من خلاله التعامل مع المشكلات التي تنطوي على قيود ومتباينات من النوع الثاني (≤) يطلق عليها طريقة المرحلتين. وسوف نعرض لهذا الأسلوب. ولكن دعنا نتوقف قليلا لنستجمع بعض الملاحظات الهامة والتي استقيناها من سرد إجراءات حل مشكلة البرمجة الخطية سواء في حالة تعظيم في حالة التدنية.

---

[1] عند استخدام الحاسبات الآلية في حل مشكلات البرمجة الخطية لابد من تحديد قيمة عددية للرمز م مقدما قبل الحل، وينصح بتحديد قيمة عددية للرمز م لتكون حوالي 1000 مرة قدر أكبر معامل في دالة الهدف.

[*] يوجد أساليب أخرى لا تعتمد على فكرة وجود متغيرات وهمية ولا يتسع المجال هنا إستعراض هذه الأساليب.



أنواع المتغيرات
متغيرات أساسية
متغيرات إضافية
هي المتغيرات التي تتعلق بهيكل المشكلة الأساسي
هي المتغيرات التي يتم إضافيتها لهيكل المشكلة الأساسي للمساعدة على توليد الحل المبدئي للمشكلة وتنقسم إلى ثلاثة أنواع
المتغيرات العاطلة يطلق عليها أيضا متغيرات قصور، أي تقيس قصور الطرف الأيمن للمتباينة عن بلوغ قيمة الطرف الأيسر
المتغيرات الفائضة وهي تقيس مقدار فائض الطرف الأيمن للمتباينة على قيمة الطرف الأيسر
متغيرات وهمية وهي متغيرات يتم إضافتها للمتباينات من النوع الثاني وتهدف إلى خلق الحل المبدئي

معلومات ضرورية يجب الإلمام بها عن مشكلة البرمجة الخطية عند حلها بإستخدام أسلوب "السمبلكس"

أنواع المتغيرات في مشكلة البرمجة الخطية	معاملات المتغيرات في دالة الهدف		المتغيرات التي يتضمنها الحل المبدئي	المتغيرات التي يتضمنها الحل الأمثل	قيم عمود الحل	شروط الوصول للحل الأمثل	
	حالة التعظيم	حالة التدنية				حالة التعظيم	حالة التدنية
متغيرات أساسية	القيم المعطاه في المشكلة	القيم المعطاه في المشكلة	لا تدخل الحل المبدئي	تظهر كلها أو بعضها على الأقل في الحل الأمثل	قيم عمود الحل دائماً موجبة ولا يمكن أن تكون سالبة في أي مرحلة من مراحل الحل سواء كانت المشكلة تعظيم أرباح أو تدنية تكاليف	• نصل للحل الأمثل عندما تصبح قيم الصف الأخير من جدل السمبلكس إما سالبة أو صفرية	نصل للحل الأمثل عندما تصبح قيم الصف الأخير من جدل السمبلكس إما موجبة أو صفرية
متغيرات عاطلة	تأخذ معاملات صفرية في دالة الهدف	تأخذ معاملات صفرية في دالة الهدف	تدخل الحل المبدئي	قد تظهر بعضها في الحل الأمثل			
متغيرات فائضة	تأخذ معاملات صفرية في دالة الهدف	تأخذ معاملات صفرية في دالة الهدف	لا تدخل الحل المبدئي	قد تظهر بعضها في الحل الأمثل			
متغيرات وهمية	تأخذ قيم منخفضة جداً نرمز لها عادة بالرمز –م	تأخذ قيم كبيرة جداً نرمز لها عادة بالرمز م	تدخل الحل المبدئي	لا تظهر أبداً في الحل الأمثل			

طريقة المرحلتين:

تنطوي هذه الطريقة على ضرورة التخلص من المتغيرات الوهميـــة أولا في المرحلة الأولى من الحل ومن ثم توفير حل أساسي تبدأ منه المرحلة الثانية بغرض الوصول إلى الحل الأمثل، ولعل هذا هو السبب فـــي تســـميتها بـــهذا الاسم. دعنا الآن نوضح سير العمل بإستخدام هذه الطريقة.

المرحلة الأولى:

في ظل هذه المرحلة تجعل معاملات متغيرات دالة الـــهدف ذات معـــامل يساوي صفر، ما عدا المتغيرات الوهمية والتي يتم جعل معامل دالة الهدف لها يساوي −1، وبعد ذلك يتم استخدام أسلوب السيبملكس المعتاد وحتـــى نصـــل بدالة الهدف إلى القيمة القصوى لها. دعنا نتفق على تسمية دالة الهدف في هذه المرحلة دالة هدف المرحلة الأولى.

المرحلة الثانية:

تبدأ هذه المرحلة بإعادة معاملات دالة الهدف إلى سيرتها الأولى. وهـــذا يعني أن المتغيرات الأساسية تأخذ المعاملات الفعلية الـــواردة فـــي المشـــكلة الأصلية، أما المتغيرات العاطلة والصفرية فطبيعة الحال تكون معاملاتها أيضا تساوي صفر. دعنا نوضح جوانب هذه الطريقة بإستخدام المثال التالي، وقـــد أوردنا جداول الحل دون إجراءاته بعد ما تمكنا من تلك الإجراءات في الأمثلة السابقة وللتبسيط هنا قدر الإمكان.

مثال

ر= 2س$_1$ + 10 س$_2$ أكبر ما يمكن

بشرط أن:

6 س$_1$ + 8 س$_2$ ≤ 12

2 س$_1$ + 6 س$_2$ ≥ 4

س$_1$ ، س$_2$ ≥ 0

الحل:

تحديد مشكلة المرحلة الأولى:

ر = 0 س$_1$ + 0 س$_2$ + 0 س$_3$ + 0 س$_4$ – س$_5$

بشرط أن:

6 س$_1$ + 8 س$_2$ + س$_3$ = 12

2 س$_1$ + 6 س$_2$ – س$_4$ + س$_5$ = 4

س$_1$ ، س$_2$ .... س$_5$ = صفر

جدول (1)

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	0 س$_1$	0 س$_2$	0 س$_3$	0 س$_4$	1- س$_5$	
0	س$_3$	12	6	8	1	0	0	
1-	س$_5$	4	2	(6)	0	1-	1	$\frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$ ← المتغير المؤهل للخروج من الحل
ل ز		4-	2-	6-	0	1	1-	
م ز – ل ز			2	6	0	1-	0	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

↑ المتغير المؤهل لدخول الحل

جدول (2)

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	0	0	0	0	1-
			س$_1$	س$_2$	س$_3$	س$_4$	س$_5$
0	س$_3$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
0	س$_2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
ل$_ز$			0	0	0	0	0
ح$_ز$ − ل$_ز$			0	0	0	0	1-

يمثل جدول (2) الحل الأمثل للمرحلة الأولى أما مظاهر هذا الحل تتمثل في أن جميع قيم الصف الأخير سالبة أو صفر. يضاف لذلك – ولو أن ليس شرطا شروريا– أننا تخلصنا في هذا الجدول من المتغير الوهمي في هذه المشكلة، وقد إستطاعت المرحلة الأولى لفظ المتغير الوهمي س5 من الحل وهو ما تهدف إلى تحقيقه هذه المرحلة، والآن دعنا ننتقل إلى المرحلة الثانية. وكما سبق وذكرنا فسوف نعيد دالة الهدف إلى سيرتها الأولى كما في المشكلة الأصلية ولكن طبعا دون أن تنطوي على المتغير الوهمي الذي لفظناه في المرحلة الأولى.

وعلى ذلك تبدو دالة الهدف على الصورة الآتية:

ر = 2 س$_1$ + 10 س$_2$ + 0 س$_3$ + 0 س$_4$

وتبدأ هذه المرحلة بنفس متغيرات الحل التي انتهت بها المرحلة الأولى أما بالمتغيرات س$_3$،س$_2$، وتظهر جداول الحل للمرحلة الثانية على الصورة الآتية:

جدول (3)

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	2 $س_1$	10 $س_2$	0 $س_3$	0 $س_4$
0	$س_3$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	1	$+\frac{4}{3}$
5	$س_2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$+\frac{1}{6}$
ل ز		$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{3}$	5	0	$+\frac{5}{6}$
م ز − ل ز			$\frac{1}{3}$	5	0	$-\frac{5}{6}$

جدول (4)

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	0 $س_1$	0 $س_2$	0 $س_3$	0 $س_4$
0	$س_4$	5-	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{3}{4}$	1
5	$س_2$		$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{8}$	0
ل ز		$\frac{3}{2}$	2	5	$\frac{5}{8}$	0
م ز − ل ز		$\frac{15}{2}$	0	5	$-\frac{5}{8}$	0

ويمثل جدول (3) في المرحلة الثانية الحل الأمثل للمشكلة وقد يتساءل القارئ كيف توصلنا إلى الحل الأمثل وما زال في الصف الأخير من جدول (3) قيما موجبة، في الواقع فإن القيمة الموجبة هي للمتغير $س_2$ ويعني أنه يجب إدخال $س_2$ للحل، وهو بالفعل أحد متغيرات الحل، حتى لو رشحناه لدخول الحل. وهذا غير منطقي- إذ لابد وأن يرشح محله متغير آخر غيره، وهو $س_4$ وهذا لن يحدث، ومن ثم لن يضيف هذا الإجراء مزيدا من التحسين على دالة الهدف.

مشكلة الثنائية

يمثل التفسير الاقتصادى والإداري لحل مشكلة ما أهم ما يمكن أن نصل إليه، حيث تتوقف جودة القرارات على مقدار ما نستقيه من معلومات وتفسيرات للحلول المقترحة للمشكلات وهذا ما نود الوصول إليه من جراء فهمنا لمشكلة الثنائية. ولكي نعرض لمشكلة الثنائية سوف نبدأ أولاً بالتمهيد لذلك من خلال مثال رقمي. ولنفترض أن أحد المنشآت تتكون من ثلاثة أقسام إنتاجية وتنتج أربعة منتجات هي س1، س2،س3،س4 ويبلغ ربح الوحدة من كل منتج8، 24، 30 ، 134 وتظهر المشكلة بعد تحضيرها على الصورة الآتية:

ر = 8 س$_1$ + 24 س$_2$ + 30 س$_3$ + 134 س$_4$ أكبر ما يمكن

4 س$_1$ + 8 س$_4$ ≥ 40000

6 س$_2$ + 12 س$_4$ ≥ 126000

2 س$_3$ + 2 س$_4$ ≥ 2000

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، س$_4$ ≤ صفر

وسوف نستعرض فيما يلي جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة دون الدخول في تفضيلات.

جدول الحل الأمثل:

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	8 س1	24 س2	30 س3	134 س4	0 س5	0 س6	0 س7
134	س4	5000	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0.13	0	0
24	س2	11000	1-	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	0
30	س3	5000	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0.147	0	$\frac{1}{2}$
		1084000	28	24	30	134	7	4	15
مز − لز			10-	0	0	0	7-	4-	15-

في جدول الحل الأمثل للمشكلة السابقة وفي صف ل ز يوجد ثلاثة أرقام وهي 7، 4، 15 تحت المتغيرات العاطلة س5،س6،س7 ويقابل كل رقم من هذه الأرقام قيداً من قيود المشكلة فالرقم 7 يقابل القيد الأول، والقرقم 4 يقابل القيد الثاني، أما الرقم 15 فيقابل القيد الثالث، وقبل أن ندخل في تحليل محتوى هذه القيم بماذا تسمى هذه الأرقام؟

يطلق على هذه الأرقام مسميات عديدة لعل أكثرها شيوعاً أسعار الظل Shadow Prices، تكلفة الفرصة البديلة Opportunity Cost، والأسعار المحاسبية Accounting Prices، دعنا نستخدم من الآن فصاعداً لفظ أسعار الظل كمسمى أساسي في هذا الفصل والفصول التالية ولنبدأ بإستعراض خصائص أسعار الظل ومن ثم جداولها لمتخذ القرار.

أولاً: الخاصية التجميعية Additive

يلاحظ أن أسعار الظل هي 7، 4، 15، كما يلاحظ من هيكل المشكلة أن الطاقة المتاحة في الأقسام الثلاثة هي 40000،138000،20000، ولو قمنا بضرب أسعار الظل في الطاقة المتاحة لكل قسم ثم جمعنا الناتج لكان هو القيمة المثلى لدالة الهدف.

28000 = 40000 × 7

504000 = 126000 × 4

300000 = 2000 × 15

1084000

ثانياً: الخاصية التحليلية Analytic

تفيد هذه الخاصية في التعرف على مدى مساهمة الموارد المتاحة للإنتاج في دالة الهدف، حيث يمكن القول أن:

- مساهمة المورد الأول = 7 × 4000 = 28000
- مساهمة المورد الثاني = 4 × 126000 = 504000
- مساهمة المورد الثالث = 15 × 2000 = 300000

ومن ثم يتضح أن المورد الثاني هو أكثر الموارد مساهمة في تحقيق الأرباح لتلك المنشأة إذ تطاول مساهمته العنصرين الأول والثالث مجتمعين تقريباً.

ثالثاً: خاصية التقييم الاقتصادى Economic Evaluation

لما كان لدينا أربعة منتجات هي س$_1$،س$_2$ ، س$_3$،س$_4$ وكانت مساهمة كل منتج في الربح هي 4، 12، 15، 67 كما أن إنتاج أي منتج من هذه المنتجات يستهلك مقادير محددة من عناصر الإنتاج والطاقة المتاحة. فلابد أن تكون الأولوية لتلك المنتجات ذات المساهمة الأعلى في الربح في دالة الهدف وسوف نكتشف ذلك من خلال التحليل الذي يقدمه الجدول الآتي:

المورد في قيود المشكلة	قيم دالة الهدف			
	8	24	30	134
	المتغيرات الأساسية للمشكلة			
	س$_1$	س$_2$	س$_3$	س$_4$
المورد الأول	28−4×7	0−0×7	0−0×7	56−8×7
المورد الثاني	0−0×4	24−6×4	0−0×4	48−12×4
المورد الثالث	0−0×15	0−0×15	30−2×15	30−2×15
	28	24	30	134

وقبل أن نوضح المعنى من تكوين الجدول السابق، دعنا نؤكد أن الأرقام التي تمثل مجموع كل عمود للمتغيرات س$_1$،س$_2$،س$_3$،س$_4$،وهي28 ، 24، 30 ، 134 إنما تشير إلى تكلفة الطاقة اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من كل عنصر. فالرقم 28 يشير إلى أن تكلفة الطاقة اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من المنتج س$_1$ تعادل 28 جنيهاً، وهكذا.

ولعل ذلك يبرر الحل الأمثل الذي توصل إليه أسلوب السيمبلكس، فالمتغير س1، لم يرشح للظهور في الحل الأمثل، نظراً لأن تكلفة الطاقة اللازمة لإنتاج وحدة واحدة منه تزيد عن مقدار ما تساهم به هذه الوحدة من أرباح. أما المتغيرات س2،س3،س4 فقد رشحت للظهور في الحل الأمثل لأن أخر وحدة

سيتم إنتاجها من كل منتج ستتعادل عندها تكلفة الطاقة المطلوبة مع المساهمة الربحية لها. من ذلك نستنتج أن سعر الظل يمثل التكلفة الإقتصادية للمورد والذي يمكن التضحية بها لإنتاج وحدة واحدة من المنتج.

رابعاً: الخاصية التكميلية Complementary

عرفنا أن المتغيرات العاطلة هي تلك المتغيرات التي تعبر عن قصور الطرف الأيمن للمتباينة عن بلوغ قيمة الطرف الأيسر. وتشير المتغيرات $س_5$، $س_6$، $س_7$ إلى المتغيرات العاطلة في مثالنا ويعنى ظهور قيم هذه المتغيرات (في الصف قبل الأخير منى جدول الحل الأمثل) بقيم موجبة إلى أننا نستغل تماماً الطاقة المتاحة لالأقسام الإنتاجية الثلاثة. ولكن الملاحظ أكثر أن أياً من هذه المتغيرات الثلاثة $س_5$، $س_6$، $س_7$ لم يظهر ضمن الحل الأمثل وهو دليل يطيح بما توصلنا إليه منذ قليل من نتائج بمعنى أن هذا ينطوي على أننا قد إستنفذنا كل الطاقة المتاحة للأقسام الثلاثة.

ولكن ما الذي يحدث إذ ظهر أحد المتغيرات العاطلة ضمن الحل الأمثل بقيمة موجبة (والذي يعني أن الطاقة المتاحة من العنصر لم تستنفذ بالكامل) الذي سوف يحدث فعلاً أن تصبح قيمة هذا المتغير في الصف قبل الأخير من جدول الحل الأمثل تساوي صفراً. وهذا يطلق عليه الخاصية التكميلية.

والآن وبعد أن استعرضنا بعض الخصائص لمشكلة الثنائية وليس كلها، يبدو قد حان الوقت للتعرف على كيفية إشتقاق المشكلة الثنائية من المشكلة الأصلية، دعنا نفترض أن المشكلة السابقة هي المشكلة الأصلية فكيف يمكن من خلالها إشتقاق المشكلة الثنائية؟

1- اجعل معاملات دالة الهدف في المشكلة الأصلية هي قيمة الطرف الأيسر لقيود الشمكلة الثنائية.

2- اعكس المتباينات فإذا كانت المتباينة من النوع الأول (≥) اجعلها مـن النوع الثاني(≤).

والآن دعنا نضع المشكلة الأصلية في مقابل المشكلة الثنائية.

المشكلة الأصلية

ر-8س$_1$+24س$_2$+30س$_3$+134س$_4$

أكبر ما يمكن

<u>بشرط أن</u>

4س$_1$ + 8س$_4$ ≥ 40000

6س$_1$ + 12س$_4$ ≥ 126000

2س$_3$ + 2س$_4$ ≥ 20000

س$_1$،س$_2$،س$_3$،س$_4$ ≤ 0

المشكلة الثنائية

ر-40000ق$_1$+126000ق$_2$+20000ق$_3$

أقل ما يمكن

<u>بشرط أن</u>

4ق$_1$≤

6ق$_2$ ≤ 24

2ق$_3$≤ 30

8ق$_1$ + 12ق$_2$ + 2ق$_3$

ق$_1$ ، ق$_2$ ، ق$_3$ ≤ صفر

دعنا الآن نورد الحل الأمثل للمشكلة الثنائية، حتى يتسنى لنا إســـتخلاص المفاهيم والعلاقات التي تربطها بالمشكلة الأصلية.

جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية

تكلفة الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	40000 ق$_1$	126000 ق$_2$	2000 ق$_3$	0 ق$_4$	0 ق$_5$	0 ق$_6$	0 ق$_7$
40000	ق$_1$	7	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1-}{8}$
126000	ق$_2$	4	0	1	0	0	$\frac{1-}{6}$	$\frac{1-}{2}$	0
20000	ق$_3$	15	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0
0	ق$_4$	10	0	0	0	0	1		$\frac{1-}{2}$
ل ز		108400	4000	126000	20000	0	11000-	5000-	5000-
م ز – ل ز		0	0	0	0		11000	5000	5000

• إستخدمنا في حل المشكلة الثنائية طريقة المرحلتين، حيث اسفرت المرحلة الأولى للحل عن طرد جميع المتغيرات الوهمية، لذلك لم تظهر هذه المتغيرات في جدول الحل في المرحلة الثانية.

بمقارنة جدولى الحل الأمثل لكل من المشكلة الأصلية والمشكلة الثنائية سوف نلاحظ ما يلي:

أولاً: قيم الحل للمتغيرات الأساسية للمشكلة الأصلية ظهرت كقيم للمتغيرات العاطلة (غير الوهمية) في الصف الأخير من جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية.

ثانياً: أسعار الظل في المشكلة الأصلية ظهرت كقيم حل للمتغيرات الأساسية في المشكلة الثنائية.

وأخيراً قد يكون من المفيد في هذا المقام أن نورد بعض الملاحظات الخاصة بالمشكلات الثنائية عموماً في علاقتها بالمشكلة الأصلية.

• إذا كان عدد القيود في المشكلة الأصلية هو ق وعدد المتغيرات هو ك ففي المشكلة الثنائية تنعكس الخصائص بمعنى أن عدد القيود فيها يصبح ك وعدد المتغيرات يصبح ق. وهذا ينطوي على أن كل متغير في المشكلة الأصلية يقابله قيد في المشكلة الثنائية.

• تتحول المتباينات من النوع الأول في المشكلة الأصلية إلى متباينات من النوع الثاني في المشكلة الثنائية، ولا يسرى ذلك على قيد عدم السالبية.

• المشكلة الثنائية للمشكلة الثنائية هي المشكلة الأصلية.

وأخيراً قد يثار التساؤل، أما أننا سوف نصل للحل من خلال المشكلة الأصلية، ما الداعي الذي يدعونا إلى تحويل المشكلة الأصلية إلى الصيغة الثنائية؟ في الواقع العملي وفي ظل تعدد المتغيرات والقيود، يكون الجهد الحسابي المبذول- ما لم نستخدم الحاسبات الآلية- يكون ضخماً ولا شك أننا نبغي الوصول للحل الأمثل بأقل جهد حسابي ممكن. وهنا تكمن عملية المفاضلة بين حل المشكلة في ثوبها الأصلي أم من الأفضل الحل من خلال الصيغة الثنائية ولقد قدم " Wolfe" في هذا الشأن قاعدة تستخدم في قياس درجة الصعوبة في إنجاز العمل الحسابي في مشكلة البرمجة الخطية. وهي $ق^2 \times ك$ حيث تشير ق إلى عدد القيود، ك = عدد المتغيرات، وتؤكد هذه القاعدة أن عدد القيود في المشكلة له تأثير أكبر على الجهد المبذول للوصول للحل الأمثل من عدد المتغيرات، فإن كانت لديك مشكلة تتكون من قيدين وثلاثة متغيرات فيمكن قياس درجة الصعوبة هنا في شكل رقمي مطلق لتعادل $2^3 \times 3 = 24$، بينما إذا حولنا المشكلة السابقة إلى المشكلة الثنائية فسوف ليصبح عدد القيود هو 3 وعدد المتغيرات هو2، ومن ثم فإن درجة الصعوبة تصل إلى $3^2 \times 2 = 54$.

ومن ثم نتوقع أن الجهد الحسابي المبذول لحل المشكلة الثنائية يزيد عن ضعف الجهد الحسابي المبذول لحل المشكلة الأصلية في حالتنا هذه.

إستخدام البرمجة الخطية في حل مشكلات النقل

تعتبر مشكلة النقل أحد صور البرمجة الخطية، وبمعنى أكثر وضوحاً يمكن صياغة مشاكل النقل في صورة دالة هدف وقيود يمكن إيجاد حل لها بإستخدام إجراءات البرمجة الخطية، ولتوضيح ذلك دعنا نتناول المثال الآتي:

تمتلك شركة النصر للصابون والمنظفات ثلاثة مصانع تقع في مدن الاسكندرية، القاهرة، بورسعيد. كما تمتلك الشركة أربعة مستودعات تقع في مدن طنطا، المنصورة، السويس، دمنهور. سعة كل مستودع بالوحدات كما يوضح ذلك الجدول رقم (8-6).

جدول رقم (8-6)

المستودعات	سعة المستودع بالألف وحدة
طنطا	50
المنصورة	10
السويس	60
دمنهور	30
بنها	20
	170 ألف وحدة

وتهتم الشركة بتحديد عدد الوحدات التي يجب نقلها من كل مصنع من مصانعها إلى كل مستودع من مستودعاتها في ضوء طاقة التصنيع لكل مصنع وكذلك تكاليف النقل من المصانع للمستودعات والتي لديها جميع المعلومات الآتية عنها كما يوضح الجدول رقم (8-7).

جدول رقم (8-7) تكاليف الشحن لكل 1000 وحدة

من إلى	طنطا	المنصورة	السويس	دمنهور	بنها	طاقة المصنع
الاسكندرية	240	300	160	500	360	100
القاهرة	420	440	300	200	220	60
بورسعيد	300	340	300	480	400	50

وأخيراً ترغب الشركة في تحديد جدول النقل (عدد الوحدات التي يجـــب شحنها من كل مصنع إلى كل مستودع) والتي تؤدي إلى تحقيق تكاليف النقــل الكلية للشركة إلى أدنى حد ممكن.

الحـــل

دعنا في البداية نفترض ما يلي:-

ت = تكاليف النقل

$س_{11}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الأول (اسكندرية) إلى المستودع الأول.

$س_{21}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الأول (اسكندرية) إلى المستودع الثاني.

$س_{13}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الأول (اسكندرية) إلى المستودع الثالث.

$س_{14}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الأول (اسكندرية) إلى المستودع الرابع.

$س_{15}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنـــع الأول (اســكندرية) إلــى المســتودع الخامس.

$س_{12}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثاني (اسكندرية) إلى المستودع الأول.

$س_{22}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثاني (اسكندرية) إلى المستودع الثالث.

$س_{32}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثاني (اسكندرية) إلى المستودع الرابع.

ولكي يسهل علينا صياغة المشكلة السابقة في صورة برمجة خطية. يمكن تصور الموقف حتى الآن كما يوضح ذلك الجدول الآتي:-

المستودعات / المصانع	طنطا	المنصورة	السويس	دمنهور	بنها	طاقة المصنع
الاسكندرية	240 س$_{11}$	300 س$_{21}$	160 س$_{31}$	500 س$_{41}$	360 س$_{51}$	100
القاهرة	420 س$_{12}$	440 س$_{22}$	330 س$_{32}$	200 س$_{42}$	220 س$_{52}$	60
بورسعيد	300 س$_{13}$	340 س$_{23}$	300 س$_{33}$	480 س$_{43}$	400 س$_{53}$	50
سعة المستودعات	50	10	60	30	20	

س$_{42}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثاني إلى المستودع الرابع.

س$_{52}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثاني إلى المستودع الخامس.

س$_{13}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثالث إلى المستودع الأول.

س$_{23}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثالث إلى المستودع الثاني.

س$_{33}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثالث إلى المستودع الثالث.

س$_{43}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثالث إلى المستودع الرابع.

س$_{53}$= عدد الوحدات المنقولة من المصنع الثالث إلى المستودع الخامس.

وعلى ذلك تبدو دالة الهدف لمشكلة النقل السابقة على الصورة الآتية:

اجعل ت أقل ما يمكن حيث أن:

ت = 240 س$_{11}$ + 300 س$_{21}$ + 160س$_{31}$ + 500س$_{41}$+360س$_{51}$

+ 420 س12+440س22+300س32+200س43+220س52

$+ 300\text{س}_{13} + 340\text{س}_{23} + 300\text{س}_{33} + 480\text{س}_{43} + 400\text{س}_{53}$

أما عن قيود المشكلة السابقة، فيوجد نوعية من القيود، النوع الأول يتمثل في القيود الخاصة بطاقة التصنيع لكل مصنع من المصانع الثلاثة، أما النوع الثاني من القيود فيتعلق بالقيود المفروضة على سعة التخزين لكل مستودع، ومن الذكر ألا ننسى قيد عدم السالبية المطلوب لأي مشكلة برمجة خطية.

أولاً: القيود الخاصة بالساعات المتاحة لكل مستودع من المستودعات الخمسة المملوكة للشركة:-

$\text{س}_{11} + \text{س}_{12} + \text{س}_{13} \le 50$

$\text{س}_{21} + \text{س}_{22} + \text{س}_{23} \le 10$

$\text{س}_{31} + \text{س}_{32} + \text{س}_{33} \le 60$

$\text{س}_{41} + \text{س}_{42} + \text{س}_{33} \le 30$

$\text{س}_{51} + \text{س}_{52} + \text{س}_{53} \le 20$

ثانياً: القيود الخاصة بطاقة المصانع المملوكة للشركة.

$\text{س}_{11} + \text{س}_{21} + \text{س}_{31} + \text{س}_{41} + \text{س}_{51} \le 100$

$\text{س}_{12} + \text{س}_{22} + \text{س}_{32} + \text{س}_{42} + \text{س}_{52} \le 60$

$\text{س}_{13} + \text{س}_{23} + \text{س}_{33} + \text{س}_{43} + \text{س}_{53} \le 50$

ثالثاً: قيود عدم السالبية

$\text{س}_{11} ، \text{س}_{21} ، \ldots\ldots\ldots\ldots \text{س}_{53} \ge$ صفر

خلاصة

محددات البرمجة الخطية

على الرغم من شيوع إستخدام أسلوب البرمجة الخطية، كأحد أهم الأدوات الكمية لحل المشكلات، واتخاذ القرارات في منشآت الأعمال، غير أن هذه الأسلوب لا يخلو من العديد من المحددات من أهمها ما يلي:-

1) ليس هناك ما يضمن أن يؤدي استخدام البرمجة الخطية إلى الوصول إلى حل أمثل للمشكلة في صورة قيم صحيحة ليس بها كسور فعلى سبيل المثال ماذا يعنى أن سفر حلاً لمشكلة برمجة خطية عن إنتاج 1590.5 تليفزيون، أو إنتاج ¾ 299 مكتب. وفي كثير من الأحوال قد تكون عملية التقريب تمثل حلاً سريعاً للمشكلة، فمثلاً يمكن القول أنه إذا نجم عن حل مشكلة البرمجة الخطية إنتاج ½ 1590 تليفزيون، أنه يقوم مدير الإنتاج بتقريب هذا الرقم إلى 1591 أو إلى 1590 تليفيزيون. غير أنه في حالات أخرى قد يبدو الأمر صعباً للغاية نظراً لما قد يترتب على عملية التقريب من تكبير تكاليف باهظة فلن يكون الأمر بنفس درجة السهولة، إذا كانت المشكلة تتعلق بإنتاج السفن أو الطائرات أو الغواصات، فالتكلفة التي تتحملها منشأة لإنتاج 3/1 سفينة كبيرة، وعدم الانتاج لا يعنى في نفس الوقت عدم استغلال الطاقة المتاحة للمصنع بشكل مثالي مما يترتب عليه تحمل تكاليف باهظة في صورة طاقة عاطلة، إن البرمجة الخطية قد لا تفيد متخذ القرار أحياناً إذا ما كتن يرغب في حلول صحيحة لمتغيرات المشكلة التي يتخذ بشأنها القرار. وفي هذا الصدد نقدم استخدام برمجة الاعداد الصحيحة والذي سوف نعرض له في جزء لاحق من هذا الكتاب.

2) يقوم نموذج البرمجة الخطية على فرضية التـــأكد التـــام Certainly ولا يسمح بإدخال ظروف عدم التأكد والمخاطرة. على الرغم من أن الواقع يبتعـد عن ظروف التأكد التام، ويميل الواقع إلى تغليبـــب ظــروف عـــدم التـــأكد والمخاطرة. فإذا كان متخذ القرار يواجه مشـــكلة تتصـــف بعـــدم التـــأكد أو المخاطرة مثل مشكلة تحديد المزيج الأمثل للإنتاج بناءً على الطلب المتوقــــع العام أو الفترة المقبلة، فإن الشكل الصادر للبرمجة الخطية يبدو غير قادر على التعامل مع مثل هذه المشكلة واتخاذ قرار بشأنها ونقترح في مثل هذه الحالـــة إستخدام أسلوب البرمجة الاحتمالية Probabilistic Programming والذي ســـوف نعرض له في أجزاء لاحقة من هذا الكتاب.

3) يقوم أسلوب البرمجة الخطية على فلسفة وجود علاقات خطيـــة بيـــن المتغيرات المشكلة – ولقد وجدنا منا سبقث مفهوم الخطية – حيث يكثر فـــي الواقع العملي أن تكون العلاقة بين متغيرات قرار ما لا ترتبـــط فيمـــا بينـــها بعلاقات خطية، فقد تأخذ العلاقة بين بعض التغيرات بشكل العلاقات التربيعيـة أو التكعيبية أو اللوغاريتمية..ز الخ من أنواع العلاقات المختلفة. ولـــهذا قـد يفشل أسلوب البرمجة الخطية في مساعدة متخذي القـــرارات فـــي مواجهـــة المشكلات التي تتصف العلاقات فيما بينها بأنها لا تخضع للشـــكل بإســـتخدام أسلوب البرمجة غير الخطية Nonlinear programming.

4) يقوم أسلوب البرمجة الخطية في شكله المعتاد عن فلسفة التعامل مـــع هدف واحد تعكسه دالة الهدف، ويتمثل عادة في تعظيـــم الربـــح، أو تجنيـــة التكاليف، والواقع أن متخذ القرار عادة ما يواجه بضرورة التعامل مع أكـــثر من هدف في نفس الوقت ومن الأمثلة على ذلك أن المدير قد يهدف إلى تحقيق أقصى أرباح مع تعظيم الحصة السوقية للمنشأة وضمان أقصى درجات الرضا للعملاء والموردين، مع تخفيض المدفوعات من الفوائد والضرائب ..... الخ.

في الواقع فإن المدير في هذه الحالة سوف يكتشف عــدم قــدرة أســلوب البرمجة الخطية المعتاد في تقديم حل مرضى له، ففي هذا الشأن يفضل قيــام المدير باستخدام أسلوب برمجة الأهداف Goal Programming.

إن المحددات السابقة لأسلوب البرمجة الخطية، تبين بوضوح أنه لا يمكن تطبيقه على كل المشكلات التي تواجه منظمات الاعمال، وإن كــان ذلــك لا يتناقض مطلقاً مع قوة وقدره هذا الأسلوب في علاج العديد من المشكلات التي يواجهها متخذوا القرارات في حالات عديدة.

الفصل التاسع

البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة

Integer Programming

الفصل التاسع

البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة

Integer Programming

تمثل البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة مشكلة برمجة خطية عادية ذات قيد إضافي "أو عدد قيود" إضافي ينص على ظهور كل أو بعض المتغيرات في الحل الأمثل بقيم صحيحة غير كسرية.

وتبدو هذه الظاهرة أكثر وضوحاً في بعض المشكلات عن البعض الآخر. فمثلاً من المنطقي أن نتحدث عن نصف كيلو سمك أو ربع كيلو من البوية. فإن الأمر يبدو غير مستساغاً في حالات أخرى مثل نصف جهاز راديو أو ربع كرسي أو 1½ تليفزيون.

وفي بعض الأحيان يلجأ متخذ القرار عندما تدعوه الحاجة إلى اتباع أسلوب البرمجة بالأعداد الصحيحة، أن يقوم بتحضير المشكلة على النحو المعتاد. دون تضمينها قيداً أو قيوداً تحتم صحة الأعداد التي تبدو عليها قيم الحل الأمثل وذلك تضارباً للتعقيدات المختلفة. وعندما تظهر بعض المتغيرات في الحل الأمثل بقيم كسرية، فإنه يجري تقريباً على النحو المعتاد. غير أن هذا التقريب يقود بالضرورة إلى عدد من المشكلات هي:

1- قد يصبح الحل الأمثل بعد التقريب (إلى أقرب رقم صحيح) حلاً غير ممكناً كذلك هناك صعوبة لتحديد الاتجاه الذي تسير فيه عملية التقريب حتى يظل الحل النهائي حلاً ممكناً. بل قد يكون من الضروري بعد إجراء عملية التقريب أن يتم تغيير بعض المتغيرات بمقدار وحدة أو أكثر للمحافظة على

إمكانية الحل، ولتوضيح ذلك دعنا نتناول قيود مشكلة مصغرة على النحو التالي:

المطلوب تعظيم قيمة ر

$$ر = 3س_1 + 4س_2$$

بشرط

$$2س_1 + 2س_2 \le 11$$
$$-2س_1 + 2س_2 \le 5$$
$$س_1 ، س_2 \ge صفر$$

- الحل -

(1) توجيه المشكلة نحو الحل المبدئي

تنطوي هذه الخطوة على تحويل المتباينات إلى معادلات وذلك من خلال إضافة متغيرات عاطلة Slack، حيث يتم إضافة المتغير العاطل $ع_1$ للمتباينة الاولى، المتغير العاطل $ع_2$ للمتباينة الثانية. وتبدو قيود المشكلة على النحو الآتي:

$$2س_1 + 2س_2 + ع_1 = 11$$
$$-2س_1 + 2س_2 + ع_2 = 5$$

(2) إظهار المتغيرات العاطلة في دالة الهدف واستكمال تحضير المشكلة

عظم

$$ر = 3س_1 + 4س_2 + 0ع_1 + 0ع_2$$

في ظل القيود

$$2\text{س}_1 + 2\text{س}_2 + 0\text{ع}_1 + 0\text{ع}_2 = 11$$

$$-2\text{س}_1 + 2\text{س}_2 + 0\text{ع}_1 + 0\text{ع}_2 = 5$$

س_1 ، س_2 $\leq$ صفر

(3) تكوين جدول الحل المبدئي:

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	3 س_1	4 س_2	0 ع_1	0 ع_2
0	ع_1	11	2	2	1	0
0	ع_2	0	2-	②	0	1
		0	0	0	0	0
			3	4	0	0

يلاحظ أن جدول الحل المبدئي لا يمثل حلاً أمثلاً للمشكلة. حيث أن الحل المثل في مشاكل التعظيم يجب أن يحتوي الصف الأخير من الجدول قيم سالبة أو صفر.

(4) تطوير الحل المبدئي:

أ. تحديد المتغير الأساسي المؤهل لدخول الحل. وهو المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة في الصف الخير من جدول الحل المبدئي. س_2

ب. تحديد المتغير العاطل الذي يخرج من الحل. ويتم تحديده كما يلي:

	قيم الحل	÷	قيم المتغير المؤهل لدخول الحل		
ع_1	11	÷	2	=	5½
ع_2	5	÷	2	=	2½

وبالتالي يمثل المتغير ع_2 المتغير المؤهل للخروج من الحل وهو صاحب أقل قيمة موجبة.

ج – تحديد رقم البؤرة، وهو الرقم الناتج من تقـــاطع المتغـــير المؤهـــل لدخول الحل مع المتغير المؤهل للخروج من الحل. الرقم 2

د– تحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح، وذلك بقســـمة جميـــع المتغـــير المؤهل للخروج من الحل $ع_2$ على رقم البؤرة. وهو يمثل القيم الخاصة بالمتغير $س_2$

$س_2 = \frac{5}{2}$ ، $\frac{-2}{2}$ ، $\frac{2}{2}$ ، $\frac{0}{2}$ ، $\frac{1}{2}$

$س_1 = 2\frac{1}{2}$ ، 1- ، 1 ، صفر ، $\frac{1}{2}$

- تحويل الأرقام التي تقع فوق أو تحت رقم البؤرة إلى صفر.
- تحويل الرقم 2 الذي يقع أعلى البؤرة إلى صفر.

صف ع1 الجديد = صف ع1 القديم − [الرقم المطلوب تحويله إلى صفر × صف س2 الجديد] =

= 11 − (2½ × 2) = 6

= 2 − (1- × 2) = 4+

= 2 − (1 × 2) = صفر

= 0 − (0 × 2) = صفر

= 1 − (½ × 2) = صفر

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	3 س1	4 س2	0 ع1	0 ع2
0	ع1	6	(4)	0	0	0
4	س2	2½	1-	1	0	½
الحل		10	4-	4	0	2
أمثلية الحل			7	0	0	2-

- لا يمثل الحل السابق بعد الحل الأمثل للمشكلة نظراً لوجود بعض القيم الموجبة في الصف الخير من الجدول.
- المتغير المؤهل لدخول الحل هو $س_1$ (صاحب أكبر قيمة موجبة فـــي الصف الخير من الجدول السابق).
- المتغير المؤهل للخروج من الحل يتم تحديده كما يلي:

	قيم الحل	÷	قيم المتغير المؤهل لدخول الحل		
$ع_1$	6	÷	4	=	1½
$ع_2$	2½	÷	1−	=	− 2½

يميل المتغير $ع_1$ المتغير المؤهل للخروج المتغير للخـــروج مـــن الحل لأنه صاحب أقل قيمة موجبة.

- رقم البؤرة هو الرقم 4 الذي حوله دائرة والناتج من تقاطع المتغــــير المؤهل لدخول الحل مع المتغير المؤهل لخروج من الحل.

- تحويل الرقم البؤرة إلى واحد:

$$\therefore \text{ صف } س_1 = \frac{6}{4}، \frac{6}{4}، \frac{0}{4}، \frac{0}{4}، \frac{0}{4}$$

$$= 1\frac{1}{2}، 1، 0، 0، 0$$

- تحويل الرقم −1 أسفل رقم البؤرة إلى صفر:

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	3 $س_1$	4 $س_2$	0 $ع_1$	0 $ع_2$
3	$س_1$	1½	1	0	0	0
4	$س_2$	4	0	1	0	½
الحل		20½	3	4	0	2
أمثلية الحل			0	0	0	2−

الحل السابق حل مثالي، لأن كل القيم في الصف الأخير من الجدول سالبة أو صفر.

الحل الأمثل

إنتاج 1½ وحدة من المنتج $س_1$ إنتاج 4 وحدات من المنتج $س_2$ أقصى ربح ممكن هو 20½ جنيه.

يلاحظ من الحل البياني السابق أن الحل الأمثل للمشكلة يقع عند النقطة جـ والذي يترتب عليه إنتاج 1½ وحدة من المنتج س1، 4 وحدات من المنتج س2 (كما توصلنا إلى ذلك من قبل من خلال أسلوب السيمبلكس).

والسؤال الآن ؟؟

إذا قمنا بتقريب $س_1$ إلى 2 فمعنى ذلك أن حل المشكلة يقع عند النقطة م في الشكل البياني، وكما هو ملاحظ، فإن النقطة م تقع خارج منطقة الحل الممكن وهذا يعني أن هذا الحل لا يمكن تحقيقه في ظل قيود المشكلة والموارد المتاحة.

- البديل الآخر هو أن نجعل قيمة $س_1$ = 1 وهذا الحل أيضاً يكون حلاً غير ممكن، كما انه لا يمثل الحل المثل حيث سوف تنخفض الأرباح إلى 19 = [1 × 3 + 4* 4].
- قد يرى البعض أن يجب تقريب قيمة $س_1$ إلى 2 وتعديل قيمة $س_2$ إلى 3 وهذا الحل يتحقق عند النقطة ل. ويلاحظ أن النقطة ل تقع داخل منطقة الحل الممكن. والسؤال الآن هل يعتبر هذا الحل مثالياً؟ في

الواقع فإن الأرباح الناتجة عن هذا الحل تبلغ 18 جنيه [2×3 + 3×4].
وكما نعرف أيضاً أن أي نقطة داخل منطقة الحل الممكن تمثل حلاً ممكناً للمشكلة لكنها لا تمثل أبداً الحل الأمثل. وأن الحل الأمثل يقع على حدود منطقة الحل وبالتحديد عند أحد رؤوس الشكل البياني الممثل لمنطقة الحل الممكن. وعلى ذلك فإن أي بدائل أخرى لقيم صحيحة لكل من المتغير $س_1$، $س_2$ وبحيث تقع داخل منطقة الحل الممكن لن تمثل الحل لأمثل للمشكلة، كما أن أي بدائل أخرى لقيم صحيحة لكل من المتغيرين $س_1$، $س_2$ تقع خارج منطقة الحل الممكن، فهي حلول قيم غير الممكن تحقيقها في ظل قيود المشكلة.

عملية التقريب

- إذا كنا نرغب في أن تكون قيم كل من $س_1$، $س_2$ قيم غير كسرية وعلى ذلك يجب تقريب $س_1$. إذا قمنا بتقريب قيمة $س_1$ إلى 2 هل يظل الحل الذي توصلنا إليه حلاً أمثل. للإجابة على هذا السؤال قد يكون من المفيد تصوير حل المشكلة السابقة بيانياً كما يلي:

<u>الحل البياني</u>

❁ ***القيد الأول***

افترض أن $س_1$ = صفر ∴ صف $س_2$ = $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$

افترض أن $س_2$ = صفر ∴ صف $س_1$ = $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$

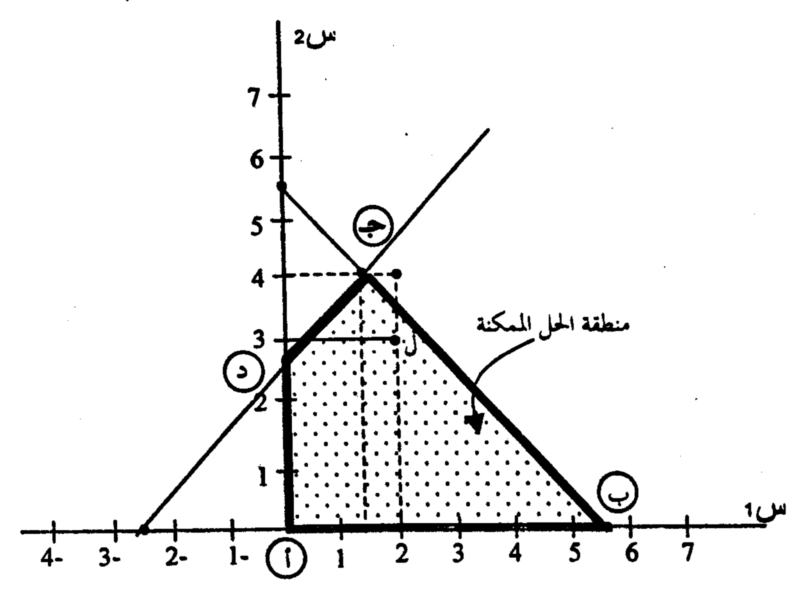
∴ يمكن تمثيل القيد الأول بيانيا بالنقطتين (0، 5½)، (5½، 0)

* *القيد الثاني*

افترض أن س$_1$ = صفر ∴ صف س$_2$ = $\frac{5}{2}$ = $2\frac{1}{2}$

افترض أن س$_2$ = صفر ∴ صف س$_1$ = $\frac{5}{-2}$ = $-2\frac{1}{2}$

∴ يمكن تمثيل القيد الثاني بيانياً بالنقطتين (0، 2½)، (-2½، 0)

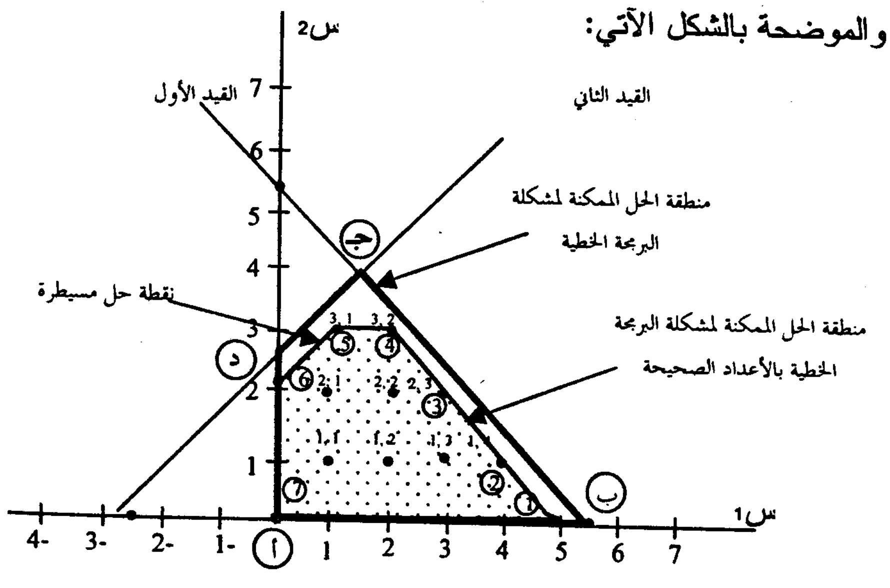


يلاحظ من العرض السابق مدى أهمية استخدام البرمجة الخطية بـــالعداد الصحيحة لضمان أن يكون حل المشكلة في صورة قيم غير كسرية. وفي هـذا الشأن يجب الإشارة أنه في الحالات التي يحتاج فيها متخذ القرار إلـــى تقييـد المشكلة لتصبح مشكلة برمجة بالأعداد الصحيحة، فإن هذا التقييد قـــد يكـون كاملاً، وقد يكون جزئياً، ففي حالة التقييد الكامل، فإن قيم المتغـيرات جميعـاً تكون مقيدة بين أن تكون صفراً أو عدداً صحيحاً ويطلق علي المشكلة في هذه الحالة مشكلة <u>البرمجة بالأعداد الصحيحة الخالصة أو الكاملـة Pure Integer Problem</u>. وأخيراً فإنه يوجد نوعاً آخر من مشاكل البرمجة الخطية بـــالأعداد الصحيحة يطلق عليه مشكلة الصفر أو الواحد Problem Zero or One، وفـــي

ظل هذا النوع فإن متغيرات المشكلة تكون مفيدة بحيث يظهر اما مساوية للصفر أو الواحد الصحيح.

برمجة الأعداد الصحيحة: طريقة محذوفات جوموري Integer Programming: Gomory Cutting

سوف نستعرض هنا طريقة محذوفات جوموري[1] لحل المشكلة البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة، وذلك على اعتبار أنها أنجح الطرق في هذا المجال، كما أنها تضمن بلوغ الحل الأمثل في عدد محدود من الخطوات. وقبل أن نتناول هذا الأسلوب بالتفصيل. يثار التساؤل لماذا سميت هذه الطريقة بطريقة المحذوفات. الإجابة على هذا التساؤل يتطلب منا ضرورة الإلمام بالتصور الهندسي الطريقة. ولتوضيح ذلك، افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية السابقة والتي أوضحنا الحل البياني لها. فإذا ما أضفنا إلى هذه المشكلة قيداً إضافياً يتطلب أن تكون قيم المتغيرات قيماً غير كسرية، فإن المجال الممكن لحل هذه المشكلة سوف يتقلص إلى مجموعة النقاط المحدودة المظللة والموضحة بالشكل الآتي:



(1) سميت هذه الطريقة بهذا الاسم بالنسبة مكتشفها رالف جوموري.

يلاحظ أن النقاط التي تم تحديدها في الشكل السابق في منطقة الحل الممكن، هي جميع النقاط الممكنة والتي تمثل قيماً كسرية لكل من $س_1$، $س_2$. وهي بالتالي تمثل مجالاً ممكناً لحل مشكلة البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة. غير أن هذه النقاط لا تعطينا شكلاً محدوداً. ومن ثم نصبح أمام مشكلة برمجة خطية جديدة تتصف بالخصائص الآتية:

1- يحتوي المجال الجديد على كل النقاط غير الكسرية في المجال القديم.
2- كل رأس في المجال الجديد عبارة عن نقطة غير كسرية.

وكما عرفنا من قبل أن حل مشكلة البرمجة الخطية دائماً وأبداً ما يكون عند واحدة من تلك الرؤوس، وبذلك نصبح واثقين تماماً من ان الحل سوف يكون حلاً غير كسرياً، كما أن أسلوب السيمبلكس المعتاد كفيل بأن يقودنا إليه من خلال عدد محدود من الخطوات.

معنى ذلك أن التصور الهندسي لطريقة محذوفات جوموري، تسير على أساس البدء بحل المشكلة على أنها مشكلة برمجة خطية عادية. فإذا تحققت قيود عدم الكسرية تلقائياً، كان بها، وإلا فإننا نوالي إضافة قيد بعد آخر (وليس دفعة واحدة) حتى تنتهي القيم الكسرية، فنكون بذلك قد بلغنا الحل الأمثل.

والآن لم يعد خافياً على القارئ سر تسمية "محذوفات جوموري" بهذا الاسم. فلما كانت منطقة الحل الممكنة في المشكلة الأصلية تتحدد بمجموعة من الرؤوس التي يحتمل أن يكون بعضها أو كلها تمثل قيماً كسرية، فإن التصور العام لهذه الطريقة يقتضي القيام بحذف هذه الرؤوس وبحيث يظهر مجالاً آخر ممكناً لحل المشكلة تكون جميع النقاط المحددة لرؤوسه قيماً غير كسرية. ويتم هذا الحذف جبرياً باستخدام "قيود جوموري". فكيف يمكن اشتقاق هذه القيود.

وعلى ذلك إذا ما استطعنا ــ عن طريق إضافة قيود جديدة ــ لتوصيل النقاط المظللة على حدود الشكل بعضها ببعض، فإنه يمكن لنا أن نتخيل ــ بعد إضافة هذه القيود ــ إمكانية التعامل مع الشكل الجديد على أنه شكل محدود.

وبالتعويض بقيم النقاط (1)، (4)، (5)، (6)، (7) والتي تقع عند حدود المنطقة الجديدة، حيث لا يمثل أياً من قيم هذه النقاط أي قيم كسرية لكل من س١، س٢، وبالتعويض في دالة الهدف سوف نصل إلى النتائج التالية:

د = 3 س1 + 4 س

النقطة (1) د = 3 × 5 + 4 × 0 = 15

النقطة (4) د = 2 × 5 + 4 × 2.5 = 20 تقريباً

النقطة (5) د = 1 × 5 + 4 × 3 = 17

النقطة (6) د = 3 × 0 + 4 × 2 = 8

النقطة (7) د = 3 × 0 + 4 × 0 = 0

يلاحظ ان أفضل الحلول غير الكسرية هي

إنتاج 2 وحدة من س١

إنتاج 3 وحدات من س٢

أقصى أرباح هي 22 جنيهاً

تشير النتائج أننا قد ضحينا بوحدة من المنتج س2 فبدلاً من إنتاج 4 وحدات انتجنا ثلاثة وحدات، نظير إنتاج وحدتين من المنتج س1 بدلاً من إنتاج وحدة ونصف من نفس المنتج، وقد ترتب على ذلك في الواقع ضرب عصفورين بحجر واحد. فقد تم التغلب على مشكلة القيم الكسرية في الحل الأمثل للمشكلة، هذا بالإضافة إلى زيادة الأرباح من 20½ جنيهاً إلى 22 جنيه.

وأخيراً يثار التساؤل لماذا لم نقم باختيار النقاط (2)، (3) على الرغم من أن هذه النقاط تقع على حدود منطقة الحل الممكنة التي تحقق عدم المسرية لمتغيرات المشكلة. والواقع كما ذكرنا قبل ذلك. فلأن هذه النقاط لا تمثل رؤوساً في منطقة الحل الممكنة، هذا من ناحية أو من ناحية أخرى، فإن نقاط أخرى على حدود منطقة الحل الممكنة تمثل رؤوساً وفي نفس الوقت تسيطر على النقطية (2)، (3)، ونقصد هنا بالسيطرة أن هذه النقط سوف تحقق نتائج أفضل لما تحققه النقاط (2)، (3). والمثال هنا واضح، فالنقطة أو الرأس 4 تحقق ربحية أعلى مما تحققه أياً من النقاط (2)، (3). فمقدار الأرباح عند النقطة (2) يعادل 16 [3×4 + 4×1]، أما الأرباح عند النقطة (3) فتعادل 17 [2×4 + 3×3].

اشتقاق قيود جوموري

الإجراء الذي يمكن اتباعه هنا، هو حل المشكلة على أنها مشكلة برمجة خطية عادية. وذلك دون استخدام قيود عدم الكسرية. فإذا تحقق شرط عدم الكسرية في قيم متغيرات المشكلة. تكون قد بلغنا الحل الأمثل. أما إذا لم يتحقق ذلك، فإننا نقوم بتعديل المشكلة الأصلية بإضافة قيود عدم الكسرية ثم نقوم بحل المشكلة من جديد. وليس خاف على القارئ أن إضافة قيود عدم كسرية، سوف يترتب عليه أن يصبح الحل الأمثل القديم للمشكلة حلاً غير ممكناً Infeasible. ويرى الكثير ممن عالجوا مشكلة البرمجة بالأعداد الصحيحة يفضلون استخدام أسلوب "مقابل السيمبلكس" توفيراً للجهد واستغلالاً لكفاءته الحسابية وذلك لحل المشكلة الجديدة التي ترتبت عل إضافة قيود جوموري.

وقبل أن توضح طريقة "محذوفات جوموري"، سوف نركـــز أولاً علـــى كيفية اشتقاق قيود جوموري.

ولتوضيح ذلك سوف نفترض أن قيم المتغير س_1 في جدول الحل الأمثـــل للسيمبلكس ظهرت كما يلي:

$$\text{س}_1 + 2\frac{3}{10}\text{س}_2 - \frac{1}{2}\text{س}_4 + 2\text{س}_5 - 3\frac{3}{4}\text{س}_7 + \frac{1}{4}\text{س}_8 - 3\text{س}_{10} = 4\frac{3}{5}$$

ولاشتقاق قيد جوموري، سوف يتم ذلك على خطوتين

• *الخطوة الأولى*

سوف نقوم بكتابة معامل كل متغير من المتغيرات السابقة في صورة عدد صحيح وكسر موجب، يقل عن الواحد الصحيح. وذلك كما يلي:

$$(1+0)\text{س}_1 + (2+\frac{3}{10})\text{س}_2 + (-1+\frac{1}{2})\text{س}_4 + (2+0)\text{س}_5$$
$$+ (-4+\frac{1}{4})\text{س}_7 + (0+\frac{1}{4})\text{س}_8 + (-3+0)\text{س}_{10} = 4+\frac{3}{5}$$

• *الخطوة الثانية*

سوف نقوم بنقل المعاملات غير الكسرية للمتغيرات إلى الجانب الأيســـر من المعادلة. وذلك كما يلي:

$$\frac{3}{10}\text{س}_2 + \frac{1}{2}\text{س}_4 + \frac{1}{4}\text{س}_7 + \frac{1}{4}\text{س}_8 =$$
$$\frac{3}{5} + (4 - \text{س}_1 - 2\text{س}_2 + \text{س}_4 - 2\text{س}_5 + 4\text{س}_7 + 3\text{س}_{10})$$

والجدير بالملاحظة أنه عندما تكون قيم كل المتغيرات أعداد صحيحة غير سالبة، فإنه يكون من الواضح تماماً ان قيمة الطرف الأيمـــن مـــن المعادلـــة

الأخيرة سوف يكون قيمة غير سالبة، وهو ما يؤكد أن الطرف الأيســـر مـــن ذات المعادلة لابد وان يكون بالضرورة مساوياً لـــ $\frac{3}{5}$ + عدد صحيح أي أن:

$$\frac{3}{10}\text{س}_2+\frac{1}{2}\text{س}_4+\frac{1}{4}\text{س}_7+\frac{1}{4}\text{س}_8=\frac{3}{5}+\text{عددصحيح}$$

$$،\quad \frac{3}{10}\text{س}_2+\frac{1}{2}\text{س}_4+\frac{1}{4}\text{س}_7+\frac{1}{4}\text{س}_8\geq 0$$

وهكذا لكي تكون قيم المتغيرات اعداداً صحيحة غير سالبة، فإن الشـــرط الاتي يجب أن يتحقق

$$\frac{3}{10}\text{س}_2+\frac{1}{2}\text{س}_4+\frac{1}{4}\text{س}_7+\frac{1}{4}\text{س}_8\geq\frac{3}{5}$$

ويضاف هذا القيد إلى الجدول الأخير في السيمبلكس، ويستكمل الحـــل. وفي حالة استخدام مقابل السيمبلكس، فإن يتم ضرب طرفـــي القيـــد فـــي -1 وإضافة متغير له (متغير القصور) ليبدو على الصورة الآتية:

$$-\frac{3}{10}\text{س}_2-\frac{1}{2}\text{س}_4+\frac{1}{4}\text{س}_7+\frac{1}{4}\text{س}_8=-\frac{3}{5}$$

واخيراً قبل أن نعرض لبعض الأمثلة التطبيقية لمشكلة البرمجة الخطيـــة بالأعداد الصحيحة، تثار مشكلة بشأن حالة وجود أكثر من متغير لـــــه قيمـــة كسرية في الحل الأمثل. فكيف نعالج قيود جوموري في هذه الحالة، ولقد قـــدم رالف جوموري بديلة لمعالجة هذه المشكلة نعرض لها فيما يلي:

• ***البديل الأول: الطريقة التتابعية: المتغير ذو الجزء الكسري الأكبر***

في ظل هذا البديل، يتم البدء باختيار المتغير الكسري صـــــاحب الجـــذر الكسري الأكبر (فمثلاً يتم اختيار المتغير الذي يكون جزءه الكسري يســـــاوي $\frac{2}{5}$ أولاً قبل المتغير الكسري الذي يكون جزءه الكسري يساوي $\frac{1}{5}$) ثم يتـــم

تركيب قيد جوموري لهذا المتغير، ثم يلحق هذا القيد بجدول السيمبلكس الأخير ونتقدم بالحل خطوة، فإذا ما بقيت هناك متغيرات كسرية قمنا باختيار المتغـير ذو الجذر الكسري الأكبر من بين المتغيرات الكسرية وكررنا نفس الخطـوات حتى نتخلص من جميع الأجزاء الكسرية وبالتالي نكون قد بلغنا الحل الأمثل.

• ***البديل الثاني: الطريقة الكلية***

في ظل هذا البديل يتم تصميم قيود جومـوري لجميـع المتغـيرات ذات الأجزاء الكسرية، ثم تلحق هذه القيود بالجدول الأخـير للسـيمبلكس، حيـث يستكمل حل المشكلة دفعة واحدة، حتى بلوغ الحل الأمثل غير الكسري.

PROGRAM: Linear Programming I

************* INPUT DATA ENTERED *************

Max z = 2 x 1 + 1 x 2

Subject to:

C 1 3 x 1 + 5 x 2 <= 15

C 2 3 x 1 + 1 x 2 <= 12

************* PROGRAM OUTPUT *************

Simplex Tableau: Iteration 0

Cj / Cb	Basis	Bi	2.00	1.00	0.00	0.00
			x 1	x 2	s 1	s 2
0.00	s 1	15.00	3.00	5.00	1.00	0.00
0.00	s 2	12.00	3.00	1.00	0.00	1.00
	Zj	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Cj – Zj		2.00	1.00	0.00	0.00

Simplex Tableau: Iteration 1

Cj / Cb	Basis	Bi	2.00	1.00	0.00	0.00
			X 1	x 2	s 1	s 2
0.00	s 1	3.00	0.00	4.00	1.00	-1.00
2.00	x 2	4.00	1.00	0.33	0.00	1.33
	Zj	8.00	2.00	0.67	0.00	0.67
	Cj – Zj		0.00	0.33	0.00	-0.67

Simplex Tableau: Iteration 2

Cj / Cb	Basis	Bi	2.00	1.00	0.00	0.00
			X 1	x 2	s 1	s 2
1.00	x 2	0.75	0.00	1.00	0.25	-0.25
2.00	x 1	3.75	1.00	0.00	-0.08	0.42
	Zj	8.25	2.00	1.00	0.08	0.58
	Cj – Zj		0.00	0.00	-0.08	-0.58

Final Optimal Solution

Variable	Value
x 2	0.75
x 1	3.75
Z	8.25

Sensitivity Analysis

Right-Hand Side Ranging

Constraint Number	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	12.00	15.00	60.00
2	3.00	12.00	15.00

Contribution Rate Ranging

Constraint Number	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
x 1*	0.60	2.00	3.00
x 2*	0.67	1.00	3.33

▪ تطبيق ▪

المطلوب تعظيم قيمة ر حيث أن

ر = 2 $س_1$ + $س_2$

في ظل القيود الآتية

3 $س_1$ + 5 $س_2$ ≤ 15

3 $س_1$ + $س_2$ ≤ 12

$س_1$ ، $س_2$ ≥ صفر "قيد عدم السالبية"

$س_1$ ، $س_2$ اعداد صحيحة "قيد عدم الكسرية"

ولقد أسفر حل هذه المشكلة باستخدام أسلوب السيمبلكس ودون استخدام قيد عدم الكسرية عن الحل الأمثل الآتي:

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	2 س_1	1 س_2	صفر ع_1	صفر ع_2
1	س_1	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
2	س_2	$\frac{15}{4}$	1	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
		$8\frac{1}{4}$	2	1	$-\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
			0	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{7}{12}$

ويشير جدول السيمبلكس إلى أن الحل المثل يتمثل في:

إنتاج $3\frac{3}{4}$ وحدة من المنتج س_1

إنتاج $\frac{3}{4}$ وحدة من المنتج س_2 وتحقيق أقصى أرباح وهي $8\frac{3}{4}$ جنيه $(\frac{33}{4})$

ولاستخدام أسلوب البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة للوصول إلى حل لهذه المشكلة يلاحظ أن الجزء الكسري في كل من المتغيرين س_1، س_2 هو $\frac{3}{4}$ وعلى هذا الأساس يكون لنا حرية اختيار أياً من المتغيرين لاشتقاق قيد جوموري له. افترض أننا قررنا اختيار المتغير س2، وعلى ذلك يمكن معالجة قيد جوموري لهذا المتغير كما يلي:-

$$0\text{س}_1+\text{س}_2+\frac{1}{4}\text{ع}_1-\frac{1}{4}\text{ع}_2=\frac{3}{4}$$

أي $$\text{س}_2+\frac{1}{4}\text{ع}_1-\frac{1}{4}\text{ع}_2=\frac{3}{4}$$

$$(1+0)\text{س}_2+(0+\frac{1}{4})\text{ع}_1+(-1+\frac{3}{4})\text{ع}_2=0+\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4}\text{ع}_1+\frac{3}{4}\text{ع}_2=\frac{3}{4}+(-\text{س}_2+\text{ع}_2)$$

$\therefore \frac{1}{4}\text{ع}_1+\frac{3}{4}\text{ع}_2 \geq \frac{3}{4}$	قيد جوموري

وتتمثل الخطوة التالية في ضرب قيد جوموري في −1 والذي يترتب عليه تغير إشارة المتباينة للعكس، وهو ما يطلق عليه أسلوب مقـــابل الســمبلكس، والذي من خلاله يصبح هذا القيد من النوع ≥ كبقية قيود المشكلة.

$$-\frac{1}{4}ع_1-\frac{3}{4}ع_2 \geq -\frac{3}{4}$$

إن قيد جوموري بشكله السابق لا يتطلب إضافة أحد المتغيرات الوهميـــة، وهو ما يقلل من الجهد الحسابي المطلوب في الحل. وعلى ذلك سيتم إضافـــة متغير عاطل لهذا القيد، وذلك لتحويله إلى معادلة ليصبح على الصورة الآتية:

$$-\frac{1}{4}ع_1-\frac{3}{4}ع_2+ع_3=-\frac{3}{4}$$

وبإضافة هذا القيد إلى جدول السيمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل للمشـــكلة – قبل الأخذ في الاعتبار قيود عدم الكسرية – فإن جدول السيمبلكس يظـــهر على الصورة الآتية:

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	2 $س_1$	1 $س_2$	صفر $ع_1$	صفر $ع_2$	صفر $ع_3$
1	$س_1$	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
2	$س_2$	$\frac{15}{4}$	1	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	0
0	$ع_3$	$-\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$		1
الحل		$8\frac{1}{4}$	2	1	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{7}{12}$	0
أمثلية الحل			0	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{7}{12}$	0

ويظهر من الجدول السابق أن المتغير $ع_1$ هو المتغير المرشـــح لدخـــول الحل (لاحظ أننا هنا بصدد المشكلة المقابلة للسيمبلكس) لأن المتغير $ع_1$ هـــو

صاحب أقل رقم أمامه إشارة سالبة في الصف الخير من الجدول أن المتغـــير المؤهل للخروج من الحل فيتم تحديده كما يلي:

$$\text{س}_2 = \frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3$$

$$\text{س}_1 = \frac{15}{4} \div -\frac{1}{12} = -45$$

$$\text{ع}_3 = -\frac{3}{4} \div -\frac{1}{4} = 3$$

ويلاحظ هنا أنه يمكن إخراج س2 أو ع3، والأفضل الإبقاء على المتغـــير الأساسي س2، والتضحية بالمتغير العاطل ع3، لذلك ســـوف نـــقرر إخـــراج المتغير العاطل ع3 ليحل محله المتغير العاطل ع1.

ويرى البعض في هذا الشأن يفضل دائماً التضحية بأحد المتغيرات غـــير الأساسية وبالنظر إلى مشكلتنا نجد أن المتغير ع3 سيخرج من الحل، وفقاً لمـــا سبق فإنه يجب أن يحل محله المتغير ع1 أو ع2، ولتحديد أياً مـــن المتغـــيرين يجب إدخاله الحل، سوف يتم قسمة قيم هذين المتغيرين في الصف الأخير مـــن جدول السيمبلكس على قيم هذين المتغيرين في صف عمود ع3

$$\text{ع}_1 = -\frac{1}{12} \div -\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ع}_2 = -\frac{7}{12} \div -\frac{3}{4} = 1\frac{8}{9}$$

{ يدخل الحل صاحب أقل قيم }

وتشير النتائج إلى ضرورة إدخال ع1 محل ع3

ولاستكمال متطلبات الحل نقوم بالآتي:

(1) تحويل رقم البؤرة إلى واحد (وهو الرقم $-\frac{1}{4}$ في صف ع3) وذلك بقسمة جميع قيم الصف على $-\frac{1}{4}$

∴ صف ع1 الجديد = $\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}}$ ، $\frac{0}{-\frac{1}{4}}$ ، $\frac{0}{-\frac{1}{4}}$ ، $\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}$ ، $\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}}$ ، $\frac{1}{-\frac{1}{4}}$

= 3، 0، 0، 1، 3، −4

(2) تحويل الرقم $-\frac{1}{12}$ (الرقم المطلوب تحويله لصفر × صف ع1 الجديد)

صف س1 الجديد = صف س1 الجديد − (الرقم المطلوب تحويله لصفر × صف ع1 الجديد)

$$= \frac{15}{4} - (3 \times -\frac{1}{12}) = 4$$

$$1 - (0 \times -\frac{1}{12}) = 1$$

$$0 - (0 \times -\frac{1}{12}) = 0$$

$$-\frac{1}{12} - (1 \times -\frac{1}{12}) = 0$$

$$\frac{5}{12} - (3 \times -\frac{1}{12}) = \frac{8}{12}$$

$$0 - (4 \times -\frac{1}{12}) = -\frac{4}{12}$$

```
PROGRAM: All Integer Programming
************** INPUT DATA ENTERED *************
Max z = 2 x1 + 1 x2
Subject to:
C1    3 x1 + 5 x2 <= 15
C2    3 x1 + 1 x2 <= 12
************** PROGRAM OUTPUT *************
       Level 0     Node 0:     Optimal Solution     -     8.25000
                                 x1 = 3.75
                                 x2 = 0.75
       Level 1     Node 1:     Optimal Solution     -     8.00000
                                 x1 = 4
                                 x2 = 0
```

Level 1	Node 2:	Optimal Solution	=	7.66667
		x 1 = 3.333333 x 2 = 1		
	Final Optimal Solution		=	8.00000
		x 1 = 4 x 2 = 0		

(3) تحويل الرقم $\frac{1}{4}$ (أول رقم في عمود البؤرة) إلىٰ صفر

صف س2 الجديد = صف س2 الجديد −(الرقم المطلوب تحويله لصفر × صف ع1 الجديد)

$$= \frac{3}{4} - (3 \times \frac{1}{4}) = 0$$

$$= 0 - (0 \times \frac{1}{4}) = 0$$

$$= 1 - (0 \times \frac{1}{4}) = 1$$

$$= \frac{1}{4} - (1 \times \frac{1}{4}) = 0$$

$$= -\frac{1}{4} - (3 \times \frac{1}{4}) = -1$$

$$= 0 - (-4 \times \frac{1}{4}) = 1$$

ومن ثم يظهر جدول السيمبلكس الجديد على الصورة الآتية:

ربح الوحدة	متغيرات الحل	قيم الحل	2 س1	1 س2	0 ع1	0 ع2	0 ع3
1	س1	0	0	1	0	−1	1
2	س2	4	1	0	0	$-\frac{8}{12}$	$-\frac{4}{12}$
0	ع3	3	0	0	1	3	−4
الحل		8	2	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
أمثلية الحل			0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

وضح الجدول السابق أننا قد توصلنا إلى حل ممكن (لا يحتوي على قيم
) وبذلك يكون هذا الحل هو الحل الأمثل (لاحظ أن جميع القيم في الصف
ر من جدول السيمبلكس هي قيم سالبة أو صفر) ووفقاً لمعايير أسلوب
بلكس نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل. وطالما أن الحل الذي توصلنا
للاً غير كسرياً فإنه يمثل الحل النهائي للمشكلة.

الآن دعنا نناقش مدى مثالية الحل الذي توصلنا إليه في ضوء قيام متخذ
بعملية تقريب للحلول التي توصلنا إليها في ظل مشكلة البرمجة الخطية
استخدام قيود وعدم الكسرية. وفي البداية دعن نضع هذا الحل أمامنا:

لحل الأمثل هو ..
نتاج $3\frac{3}{4}$ وحدة من المنتج $س_1$
نتاج $\frac{3}{4}$ وحدة من المنتج $س_2$
قصى أرباح بمبلغ $8\frac{1}{4}$ جنيه

عنا نتصور أيضاً الاحتمالات المختلفة لعملية التقريب التي يمكن لمتخذ
القيام بها وأثر ذلك على الأرباح.

المنتج	عدد الوحدات الصحيحة الواجب إنتاجها		
	بديل (1)	بديل (2)	بديل(3)
$س_1$	3	3	4
$س_2$	1	2	1

بالتعويض في دالة الهدف لتحديد الأرباح في ظل بديل

بديل الأول الأرباح = 2 × 3 + 1 × 1 = 7
بديل الثاني الأرباح = 2 × 3 + 1 × 2 = 8
بديل الثالث الأرباح = 2 × 4 + 1 × 1 = 9

توضح النتائج أن البديل الثالث هو أفضل البدائل، فلو قام متخذ القرار لبديل أو غيره من البدائل في ظل القيود المفروضة وحدة إلى وحدة واحدة الحلول ممكنة فعلاً؟ إن المر يتطلب اختبار قيود المشكلة أيضاً لهذه البدائل.

اختبار البديل الأول

القيد الأول $3س_1 + 5س_2 \le 15$

$3 \times 3 + 5 \times 1 = 14$ تتحقق المتباينة

القيد الثاني $3س_1 + س_2 \le 12$

$3 \times 3 + 1 \times 1 = 10$ تتحقق المتباينة

∴ الحل الأول يمثل أحد الحلول الممكنة

اختبار البديل الثاني

القيد الأول $3س_1 + 5س_2 \le 15$

$3 \times 3 + 5 \times 2 = 19$ لا تتحقق المتباينة

القيد الثاني $3س_1 + س_2 \le 12$

$3 \times 3 + 1 \times 2 = 11$ تتحقق المتباينة

∴ البديل الثاني لا يمثل أحد الحلول الممكنة

اختبار البديل الثالث

القيد الأول $3س_1 + 5س_2 \le 15$

$3 \times 4 + 5 \times 1 = 17$ لا تتحقق المتباينة

القيد الثاني $3س_1 + س_2 \le 12$

$3 \times 4 + 1 \times 1 = 13$ لا تتحقق المتباينة

∴ البديل الثالث لا يمثل أحد الحلول الممكنة

تكشف النتائج السابقة أن البدائل المختلفة التي تم التفكير فيها من حيث تقريب الكسور في المشكلة السابقة لم تسفر عن حل أمثل، فالبديل الأول يمثل أحد الحلول الممكنة غير أنه أقل البدائل تحقيقاً للربح (كما أنه أقل من البديل الذي توصلنا له باستخدام قيود جوموري) أما البديل الثاني فعلى الرغم من انه يحقق نفس الأرباح التي يحققها متخذ القرار باستخدام قيود جوموري، إلا أن هذا البديل لا يمكن تنفيذه في ضوء قيود المشكلة الأصلية. أما البديل الثالث أيضاً غير ممكن تنفيذه في ضوء قيد المشكلة الاصلية، الأمر الذي يوضح بجلاء أن عملية التقريب العشوائي لمخرجات مشكلة البرمجة الخطية دون استخدام قيود عدم الكسرية، سوف لا يقودنا في معظم الأحوال إلى حل أمثل للمشكلة.

إن الحل الذي توصلنا إليه من خلال قيود جوموري هو أفضل الحلول الممكنة (الحل الثاني) إذ في ظله تحقق أقصى أرباح ممكنة وأيضاً من ناحية أخرى هو حل يراعي قيود المشكلة أي حل ممكن تنفيذه.

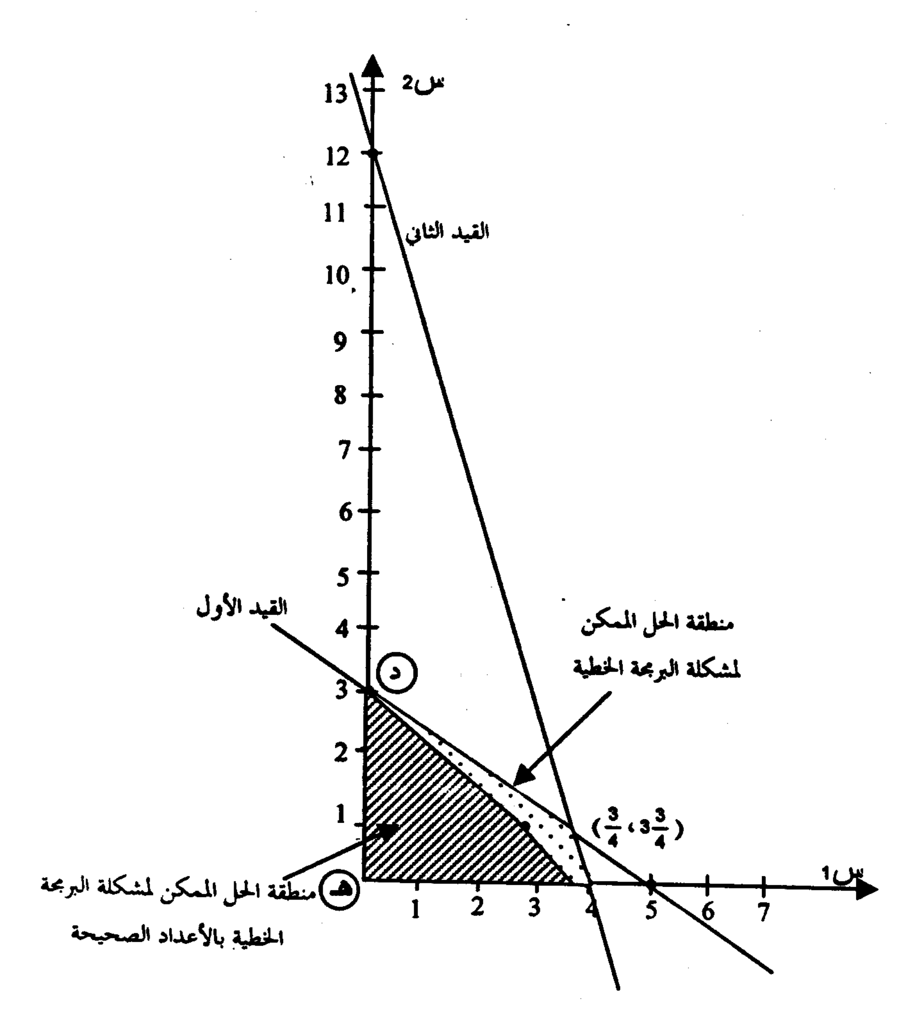
<u>التمثيل الهندسي للمشكلة:</u>

القيد الأول: افترض أن $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 3$ (0، 3)

افترض أن $س_2 = 0$ ∴ $س_1 = 5$ (5، 0)

القيد الثاني: افترض أن $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 12$ (0، 12)

افترض أن $س_2 = 0$ ∴ $س_1 = 4$ (4، 0)



يتضح من التصوير البياني أن نقطة الحل الممكن لمشكلة البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة هي عبارة عن شكل محدودب يتكون من 5 رؤوس هي (أ)، (ب)، (جـ)، (د)، (هـ). ولما كان من المعلوم أن الحل الأمثل يقع عند أحد هذه الرؤوس، وأن النقاط الأخرى بمنطقة الحل الممكن لا يمثل أياً منها الحل الأمثل، وأن كان كلها تمثل حلولاً ممكنة للمشكلة، فإن تحديد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة يتطلب اختبار هذه الرؤوس بالنسبة لدالة الهدف، ويوضح الجدول الآتي نتائج اختبار هذه الرؤوس.

النقطة (الرأس)	الأحداثي	دالة الهدف	الربح
أ	0، 4	0 × 1 + 4 × 2	8
ب	1، 3	1 × 1 + 3 × 2	7
جـ	2، 1	2 × 1 + 1 × 2	4
د	3، 0	3 × 1 + 0 × 2	3
هـ	0، 0	0 × 0 + 0 × 0	0

يرى المؤلف أن اختيار رؤوس الشكل المحدودب قد أسفرت عن الحل باستخدام طريقة محذوفات جوموري، قد توصلت إلى أن النقطة (أ) تمثل الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة، ويتمثل هذا الحل في إنتاج 4 وحدات من المنتج $س_1$، وعدم إنتاج أي وحدات من المنتج $س_2$ ، وتحقيق أرباح تصل إلى 8 جنيه. وهو بالفعل الحل الأمثل أيضاً، حيث أن أي نقطة أخرى على الشكل المحدودب لا تحقق نفس الأرباح بل أقل.

البرمجة بالأعداد الصحيحة:

- **استخدام أسلوب الحد والفرع في حل مشاكل برمجة الأعداد الصحيحة**

يتمثل أسلوب الحد والفرع Branch & Bound أحد الأساليب التي يمكن تطبيقها لحل أنواع مختلفة من المشاكل. وسوف نعرض في هذا الجزء لاستخدام هذا الأسلوب في حل مشكلات البرمجة بالأعداد الصحيحة. وغني عن البيان أنه عندما يتطلب حل المشكلة استخدام أسلوب برمجة الأعداد الصحيحة فإن ذلك يعني نقاط حل محدودة، فإذا أمكن تحديد تلك النقاط التي تمثل حلولاً ممكنة فإن حلاً واحداً وهو الحل الأمثل لابد أن يكون من بينها. وأسلوب الحد والفرع يقوم في الواقع على فلسفة تحديد الحلول التي تبدو ممكنة وتتوالى عملية الحذف لحصر الحل الممكن والوحيد أو الحل الأمثل

للمشكلة. ولتوضيح فلسفة هذا الأسلوب دعنا نتناول أحد المشاكل التـــي تبـــدو على الصورة الآتية:

المطلوب تعظيم قيمة ر حيث أن

ر = 6 $س_1$ + 3 $س_2$ + $س_3$ + 2 $س_4$

في ظل القيود

$س_1$ + $س_2$ + $س_3$ + $س_4$ ≥ 8

2 $س_1$ + $س_2$ + $س_3$ ≥ 12

5 $س_1$ + $س_3$ + 3 $س_4$ ≥ 6

$س_1$ ≥ 1

$س_2$ ≥ 1

$س_3$ ≥ 4

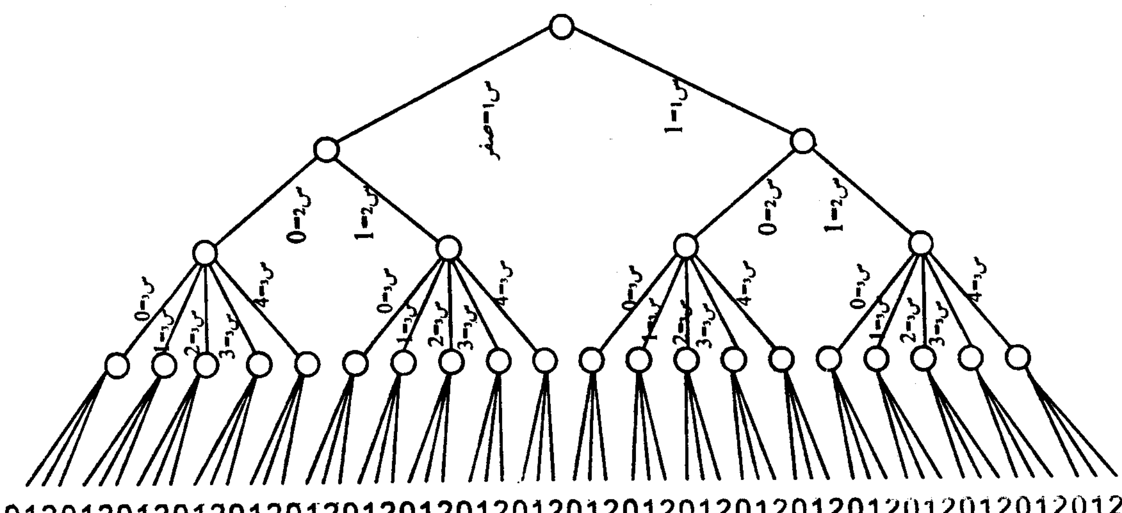
$س_4$ ≥ 2

كل من $س_1$، $س_2$ ، $س_3$ ،$س_4$ أرقام صحيحة.

ويلاحظ على المشكلة السابقة أن القيدين $س_1$≥ 1، $س_2$≥ 1 يعني ببساطة ان قيمة أياً من $س_1$، أو $س_2$ إما ان تكون صفر أو واحد. في حين أن المتغـير $س_3$ يمكن أن يأخذ خمسة قيم هي صفر، 1، 2، 3، 4، والمتغير $س_4$، يمكن أن يأخذ قيمة من ثلاثة قيم صفر، أو 1، او 2.

ومعنى ذلك أيضاً ان القيود الأربعة الأخيرة من المشكلة السابقة ينجم عنها ستون حلاً ممكناً (2 × 2 × 5 × 3 = 60) وعملية تحديد هذه الحلول يمكـــن توضيحها بيانياً من خلال فكرة الحد والنوع كما يوضح ذلك الشكل رقم [ ]، مع ملاحظة ان عملية ترتيب المتغيرات في الشكل عملية لا تخضـــع لقـــاعدة محدودة Arbitrary لكن نهاية شجرة الحد والفرع لابد وأن تحتوي في النهايـــة

على 60 فرعاً يمثل كل واحد منها أحد الحلول الممكنة. لا شـك أن المشـكلة السابقة على صغر حجمها أمكن جعل 60 حـلاً ممكنـاً لـها. ولا شـك أن المشكلات في الواقع العملي أضخم من ذلك بكثير ولكن لحسـن الحـظ فـإن الحاسب الآلي يستطيع في وقتنا الحالي حل مثل هذه المشكلات الضخمة مـن حيث القيود والمتغيرات بسهولة.



ولتحديد الحل الممكن (الأمثل) فإن أسلوب الحد والفرع مصمم لتخفيـض عملية البحث عن طريقة تحديد وحذف الفروع التـي لا تمثـل حـلاً ممكنـاً للمشكلة. والفلسفة الأساسية في ذلك هل إنه يمكن حذف الحل الحالي طالما أنه لا يحقق نتيجة أفضل من الحل السابق. أما إذا كان الحل الحالي أفضـل مـن الحل السابق فإن ذلك يستوجب حذف الحل السابق. وهكذا. وقبل التعرف على تحديد الحل الأمثل للمشكلة التي بين أيدينا، دعنا أولاً نوضح المقصود بكلمـة الحد Bound، إذ يقصد بها أعلى قيمة للأرباح يمكن الوصول إليها إذا كـانت المشكلة تعظيم الأرباح، أو أدنى قيمة ممكنة للتكاليف إذا كانت المشكلة تدنيـة التكاليف.

فإذا ما قمنا بحل المشكلة السابقة باعتبار أنها مشكلة برمجة خطية عادية (دون الأخذ في الاعتبار متطلبات برمجة الأعداد الصحيحة) فإن الحل المثل يبدو على الصورة الآتية:

$س_1 = 1$

$س_2 = 0$

$س_3 = 3.33$

$س_4 = 0.89$

ر(الأرباح) = 11.11 جنيه

والواقع أن الحل السابق لا يفي بمتطلبات برمجة الأعداد الصحيحة إذ ان كل من المتغيرين $س_3$،$س_4$ يبدوان في صورة أرقام كسرية أو صحيحة وكسرية. غير أن المهم عند هذه المحصلة أن أقصى أرباح ممكنة هي 11.11 جنيهاً ولا يمكن أن يفرز حلاً للمشكلة السابقة باستخدام برمجة الأعداد الصحيحة متجه الأرباح تفوق الرقم 11.11 جنيهاً ولذلك يعتبر الرقم 11.11 الحد العلى للأرباح.

والأفكار السابقة يمكن التعبير عنها باستخدام الشكل التوضيحي رقم (9-2) مع ملاحظة ان الأرقام بداخل الدوائر تشير إلى تتابع الدورات (الجولات) اللازمة لتطوير أسلوب الحد والفرع، والأن دعنا نوضح خطوات سير الحل باستخدام أسلوب الحد والفرع، إنه يتكون من جولات Rounds.

والأن دعنا نخوض الجولة الأولى لنرى ما سوف تسفر عنه من نتائج.

ـ الجولة الأولى ـ

تنطوي هذه الجولة على حل المشكلة من خلال أسلوب البرمجة الخطية العادية، فإن كنا من سعداء الحظ فسوف يكون الحل في صورة أرقام صحيحة لمتغيرات المشكلة، أما الاحتمال الثاني ان تكون بعض متغيرات العمل ذات قيمة تحتوي على كسور. وأياً ما يكن الأمر، فإن حل المشكلة باستخدام أسلوب البرمجة الخطية العادية هو أفضل بداية. وفيما يتعلق بمشكلتنا فإن حلها من خلال أسلوب البرمجة الخطية العادية كما أوردنا سابقاً هو:

$س_1 = 1$

$س_2 = 0$

$س_3 = 3.33$

$س_4 = 0.89$

الأرباح = 11.11 جنيه

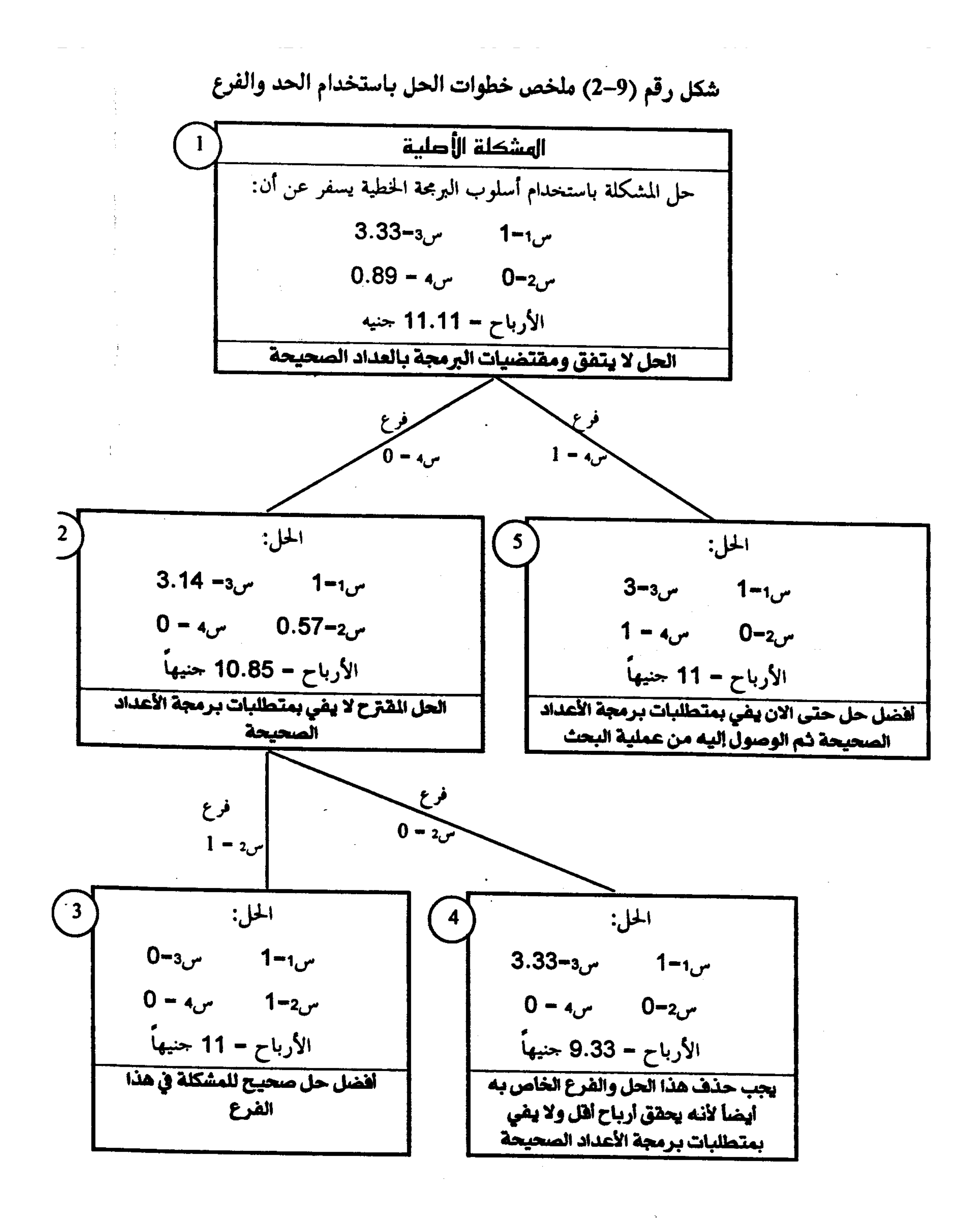
وهذا الحل لا يفي بمتطلبات برمجة الأعداد الصحيحة، ويبدو في الأفق حلاً يفي بمتطلبات برمجة الأعداد الصحيحة وهو أن:

$س_1 = س_2 = س_3 = س_4 = 0$

الأرباح = 0

ورغم أنه حل يفي بمتطلبات الأعداد الصحيحة إلا أنه حل غي مرغوب فيه، ذلك لأنه ببساطة يقول لمتخذ القرار ألا يفعل شيء او بمعنى آخر يجب عدم الإنتاج من $س_1$، $س_2$، $س_3$، $س_4$ ومما لا شك فيه أن الأرباح سوف تبلغ صفراً في هذه الحالة، وهذا الحل لا يمكن أن يكون حلاً مثالياً للمشكلة، وان كان يمثل حلاً ممكناً، بل ويمثل نقطة انطلاق للوصول إلى الحل الامثل.

شكل رقم (9-2) ملخص خطوات الحل باستخدام الحد والفرع



ـ الجولة الثانية ـ

خطوة (1): البداية

تتمثل هذه الخطوة في أن نقطة البداية للوصول للحل الأمثل للمشكلة السابقة في ضوء متطلبات برمجة الأعداد الصحيحة هي أننا سوف نفترض أن:

س$_1$ = س$_2$ = س$_3$ = س$_4$ = 0

الأرباح = 0

وميزة الحل السابق أن تمثيل نقطة انطلاق تتضمن لنا من البداية أن أحداً من متغيرات المشكلة لا يأخذ قيمة سالبة. وهو أحد مقتضيات الحل لمشكلات البرمجة الخطية عموماً.

خطوة (2): تحديد الفرع

في هذه الخطوة يجب اختيار متغير وبناء فروع والواقع أنه لا توجد قاعدة محددة لاختيار متغير معين، وإن كان يفضل أن نستخدم المتغير صاحب الجزء الكسري الأكبر إذ أثبتت التجارب أنه يمكننا من الوصول للحل الأمثل في عدد أقل من الجولات. ومن الملاحظ أن كل من المتغيرين س$_3$، س$_4$ لهما قيمة كسرية، غير أن المتغير س$_4$ صاحب أكبر كسر فيهما وعلى ذلك سوف يقع اختيارنا على المتغير س$_4$ لاختياره ولأن القيد الخاص بهذا المتغير هو س$_4$ $\geq$ 1، فمعنى ذلك ووفقاً لمتطلبات برمجة الأعداد الصحيحة، فإن هذا المتغير ليس له سوى قيمتين ـ كما أوضحنا سلفاً ـ هما صفر أو واحد وبالتالي سوف نختار حل المشكلة عندما تكون قيمة س$_4$ = 0 (النوع الأول)

ومرة أخرى عندما تكون قيمة $س_4 = 1$ (النوع الثاني). ولحل المشكلة عندما $س_4 = 0$ فإن الصورة العامة للمشكلة تظهر كما يلي:

المطلوب تعظيم الأرباح (ر)

$ر = 6 س_1 + 3 س_2 + س_3 + 2 س_4$

في ظل القيود

$س_1 + س_2 + س_3 + س_4 \leq 8$

$2 س_1 + س_2 + س_3 \leq 12$

$5 س_2 + س_3 + 3 س_4 \leq 12$

$س_1 \leq 1$

$س_2 \leq 1$

$س_3 \leq 4$

$س_4 = 0$

خطوة (3): تحديد الحد

إن حل المشكلة البرمجة الخطية السابقة باستخدام لأسلوب المعتاد، قد أزز الحل الآتي:

$س_1 = 1$ $س_2 = 0.57$

$س_3 = 3.14$ $س_4 = 0$

الأرباح = 10.85 جنيهاً

ويمثل أرباح هذا الحل الحد الأعلى عندما تكون قيمة $س_4 = 0$

خطوة (4): المقارنة

بمقارنة الحل الذي توصلنا إليه في الخطوة (3) بالحل المبدئي نجد أن الحل الذي توصلنا إليه في الخطوة الثالثة (3) يحقق أرباحاً قدرها 10.85 جنيهاً مقارنة بالحل الذي توصلنا إليه من الخطوة (3)، ولكن يمكن ان نقترح فروع حل أخرى منبثقة من هذا الحل. كما سوف نرى في الجولة القادمة.

ـ الجولة الثالثة ـ

الفرع (2)

يمكن اختبار فرع جديد للحل وذلك انطلاقاً من الحل الذي توصلنا له في خطوة (3). حيث يلاحظ على الحل السابق وجود متغيرين هما، $س_2$، $س_3$ كل منهما يحتوي على جزء كسري، وسوف نركز على المتغير صاحب الجزء الكسري الأكبر وهما المتغير $س_2$، وعلى صيغة المشكلة الحالية. أن تكون قيمة المتغير $س_2$ إما أن تكون صفراً، او واحد. (ويجب أن نذكر القارئ بأننا نعمل تحت الفرع المنبثق من المتغير $س_4$ عندما كانت قيمها تساوي صفراً). وعند هذه النقطة سوف نخلق فرعاً تأخذ قيمة المتغير $س_2$ القيمة واحد. وبإحلال القيد $س_2 = 1$ محل القيد الأصلي في المشكلة $س_2 \leq 1$ تبدو المشكلة أمامنا على الصورة الآتية:

$$ر = 6 س_1 + 3 س_2 + س_3 + 2 س_4$$

في ظل القيود

$$س_1 + س_2 + س_3 + س_4 \leq 8$$

$$2 س_1 + س_2 + س_3 \leq 12$$

$$5\,س_2 + س_3 + 3\,س_4 \leq 6$$

$$س_1 \leq 1$$

$$س_2 \leq 1$$

$$س_3 \leq 4$$

$$س_4 = 1$$

خطوة (3): تحديد الحد

إن استخدام أسلوب البرمجة الخطية في حل المشكلة التي تم صياغتها في الجولة الثالثة فرع (2) تسفر عن الحل الأمثل الآتي:

$س_1 = 1$ $س_3 = 1$

$س_2 = 1$ $س_4 = 0$

الأرباح = 10 جنيهاً

خطوة (4): المقارنة مع أفضل حل سابق

ويلاحظ أن الحل الذي توصلنا إليه من خطوة (3) يفي بمتطلبات برمجة الأعداد الصحيحة، فكل متغيرات المشكلة أصبحت في صورة أرقام صحيحة غير كسرية، وليس هذا فحسب، بل إن هذا الحل أفضل من الحل الذي بدأنا فيه والذي افترضنا فيه أن جميع قيم متغيرات المشكلة = صفر، ومن ثم كانت الأرباح أيضاً تساوي صفر. فهذا الحل يحقق لمتخذ القرار إمكانية تحقيق أرباح تصل إلى 10 جنيهات لو تم تنفيذه وعلى ذلك سوف نتخلى عن الحل المبدئي، ونتمسك ولو قليلاً بالحل الذي توصلنا إليه، على اعتبار أن أفضل الحلول المتاحة ولو لحين من الزمن.

ـ الجولة الرابعة ـ

خطوة (2): تحديد الفرع

دعنا الان نتحرك إلى الفرع الخاص بالمتغير س$_2$ والذيـــن يحـــدد قيمـــة مقدارها صفر لهذا المتغير (راجع الشكل رقم (9-2)) واختبار ما سوف يسفر عنه حل مشكلة البرمجة الخطية إذا ما كانت قيمة س$_2$ = 0. وغني عن التنبيه أنه يجب إعادة صياغة المشكلة وذلك بـــإحلال القيـــد س$_2$ = 0 محـــل القيـــد س$_2$ = 1. (ومرة أخرى نذكرك بأننا مازلنا نعمل تحت الفرع الأساسي الخاص بالمتغير س$_4$ حيث يأخذ المتغير س$_4$ القيمة 0). ومن ثم تبدو المشـــكلة علـــى الصورة الآتية:

المطلوب تعظيم الأرباح (ر)

ر = 6 س$_1$ + 3 س$_2$ + س$_3$ + 2 س$_4$

في ظل القيود

س$_1$ + س$_2$ + س$_3$ + س$_4$ ≥ 8

2 س$_1$ + س$_2$ + س$_3$ ≥ 12

5 س$_2$ + س$_3$ + 3 س$_4$ ≥ 12

س$_1$ ≥ 1

س$_2$ = 0

س$_3$ ≥ 4

س$_4$ = 0

خطوة (3): تحديد الحد

إن حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب البرمجة الخطية سوف يسفر عن الحل الأمثل الآتي:

س$_1$ = 1　　　س$_3$ = 3.33

س$_2$ = 0　　　س$_4$ = 0

الأرباح = 9.33 جنيهاً

خطوة (4): المقارنة مع أفضل حل سابق

ويلاحظ أن الحل الذي توصلنا إليه ليس أفضل من أفضل حل سابق للمشكلة، إذ يحقق هذا الحل أرباح 9.33 جنيهاً، كما أن هذا الحل لا يفي بمتطلبات برمجة الأعداد الصحيحة، نظراً لظهور المتغير س3 محتوياً على قيمة كسرية. أما أفضل حل سابق، فلقد كان يحقق أرباحاً تصل إلى 10 جنيهات مع الوفاء بشروط برمجة الأعداد الصحيحة، وعلى ذلك نحذف الحل الحالي، ونبقى على الحل السابق. كأفضل حل متاح حتى الآن.

ـ الجولة الخامسة ـ

خطوة (2): تحديد الفرع

بالعودة إلى الفرع الخاص بالمتغير س4، فقد اختبرنا حتى الان جميع الحلول الممكنة عندما كانت قيمة المتغير س4 تساوي 0.

والآن دعنا نعود إلى الفرع الخامس بالمتغير س4 ، والذي يحدد قيمة واحد لهذا المتغير. (راجع الشكل رقم (9-2)).

خطوة (3): الحد

في هذه الخطوة يجب تعديل صياغة مشكلة البرمجة الخطية، وذلك بإحلال $س_4$ = 1 محل $س_4$ = 0، وحل المشكلة بعد هذا التعديل سوف يسفر عن الحل المثالي التالي:

$س_1$ = 1 $س_3$ = 3

$س_2$ = 0 $س_4$ = 1

الأرباح = 11 جنيهاً

والحل السابق يفي بمتطلبات برمجة الأعداد الصحيحة، حيث تظهر قيم جميع متغيرات المشكلة في صورة أعداد صحيحة ليس بها كسور عشرية.

خطوة (4): المقارنة

بمقارنة الحل الذي توصلنا إليه في الخطوة السابقة مباشرة، مع أفضل حل ممكن لدينا، نجد أن الحل في الخطوة السابقة أفضل إذا يفي بمتطلبات برمجة الأعداد الصحيحة، ويحقق أرباحاً تصل إلى 11 جنيهاً، بينما أفضل حل ممكن متاح لدينا كان يحقق أرباحاً تبلغ 10 جنيهات.

وعند هذا الحد يمثل الحل الذي توصلنا إليه في الخطوة السابقة الحل المثل للمشكلة، ولا يوجد إمكانية لاختبار حلول أخرى.

ولكن الان قد يتراءى للقارئ أن هذه الأسباب يحتاج لقدر كبير من الجهد للوصول للحل الأمثل، ولكن يجب أن يتذكر القارئ أن المشكلة السابقة كان لها 60 حلاً بديلاً، وكل الذي قمنا باختباره هو 5 حلول فقط توصلنا بعدها للحل الأمثل وهنا تبدو أهمية طريقة الحد والفرع في التخلص من عدد كبير

من الحلول التي لا تحقق حلاً مرضياً للمشكلة. والتركيز على عدد محدود من الحلول التي يخرج منها الحل الأمثل.

الخلاصة

عرضنا في هذا الفصل لأسلوب برمجة الأعداد الصحيحة كأحد أســــاليب حل المشكلات واتخاذ القرارات الإدارية. حيث عرض الفصل لأسلوبين مـــن أهم الأساليب حل مشكلات برمجة الأعداد الصحيحة، تمثل الأسلوب الأول في طريقة محذوفات جوموري أما الأسلوب الثاني فهو أسلوب الحد والفرع.

الفصل العاشر

البرمجة الاحتمالية

Probabilistic Programming

الفصل العاشر

البرمجة الخطية الاحتمالية

Probabilistic Linear Programming

مقدمة

تنقسم مشاكل البرمجة الخطية بصفة عامة إلى قطاعين أساسيين هما: المشاكل المبنية على المعرفة الكاملة بكل ما نود معرفته عن المشكلة وأن هذه المعرفة مؤكدة. ويطلق على هذا القطاع البرمجة اليقينية Certainty Programming.

أما النوع الثاني فهو المشاكل التي تتبني على معارف جزئية أو معلومات غير كاملة. ويطلق عليها البرمجة غير اليقينية أو البرمجة الاحتمالية. Uncertainty or Probabilistic Programming.

ولا شك أن ظروف عدم التأكد هي أحد أهم السمات التي تحيط بمعظم القرارات التي تواجهها الإدارة في المنشآت. ولذلك سوف نخصص هذا الفصل لدراسة مشاكل البرمجة الخطية في ظل ظروف عدم التأكد، ونود أن نلفت انتباه الباحثين في هذا الصدد إلى عدم التأكد هنا قد يصيب بعض أو كل الجوانب الآتية بالنسبة لمشكلة البرمجة الخطية:

(1) عدم التأكد بالنسبة لقيم المعاملات في دالة الهدف.

(2) عدم التأكد بالنسبة لقيم الطرف الأيسر من قيود المشكلة.

(3) عدم التأكد بالنسبة لقيم مصفوفة الطرف الأيمن لقيود المشكلة.

وسوف نقوم بعرض بعض الأساليب التي يمكن استخدامها عندما تظهر مشكلة عدم التأكد في مشاكل البرمجة الخطية.

(1) التغلب على عدم التأكد باستخدام القيم المتوقعة للمتغيرات العشوائية. Expected Values for Random Variables

يعتبر أسلوب القيمة المتوقعة من الطرق الشهيرة لإيجاد حل تقريبي لمشكلة البرمجة الاحتمالية، ففي ظل هذا الأسلوب يتم إحلال كل القيم أو معاملات غير المؤكدة بالقيمة المتوقعة المناظرة لها. وبالتالي تتحول مشكلة البرمجة غير اليقينية إلى مشكلة برمجة يقينية معادلة. يستخدم لحلها أسلوب السيمبلكس المعتاد. ويطلق على المشكلة في ثوبها الجديد "البرنامج اليقيني المعادل" Deterministic Equivalent. وتجدر الإشارة إلى أنه كلما انخفض درجة تشتت القيم حول وسطها الحسابي (مقاساً ذلك بالانحراف المعياري) فإن حل مشكلة البرمجة الخطية باستخدام الأسلوب المعتاد (البرنامج اليقيني) سوف تقترب جداً من الحل الأمثل. غير أنه مع زيادة تشتت القيم (زيادة الانحراف المعياري) فمن شأن الأسلوب المعاد أن يقود إلى حل يبتعد كثيراً عن الحل الأمثل. وما قد يصاحب ذلك من تكبد المنشأة لأعباء اقتصادية كبيرة. ولتوضيح ما سبق. دعنا نتناول المثال التوضيحي الآتي:

<u>مثال (1)</u>

تمتلك أحد الشركات 200 وحدة من احد المنتجات حيث تتكلف الشركة جنيهاً واحداً كتكلفة شحن للوحدة من مصنعها إلى منفذ التوزيع، وذلك لمقابلة طلب غير مؤكد. ولقد أشارت الدراسات إلى أنه في حالة زيادة الطلب عن الكمية المعروضة فإن الشركة سوف تضطر إلى مواجهة هذا الطلب الزائد بشراء الوحدات محلياً بتكلفة الوحدة 2 جنيه. وتشير الدراسات في هذا الشأن إلى أن الطلب يتبع توزيعاً معتدلاً ويتراوح بين 140، 160 وحدة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات التي يجب شحنها من المصنع إلى منفذ التوزيع والتكلفة الكلية المترتبة على ذلك.

الحـــل

يلاحظ ان الطلب في المثال السابق هو متغير عشوائي، ولأنه أيضـــاً (أي الطلب) يتبع توزيعاً معتدلاً طبيعياً، فإن القيمة المتوقعة للطلـــب تعـــادل 150 وحدة ($\frac{160+140}{2}$). والآن دعنا نفترض أن:

$س_1$= عدد الوحدات المرسلة من المصنع إلى منفذ التوزيع.

$س_2$= عدد الوحدات المشتراة محلياً.

ومن ثم يمكـــن صياغـــة مشـــكلة البرمجـــة الخطيـــة المعتـــادة علـــى الصورة الآتية:

دالة الهدف: اجعل ت أقل ما يمكن حيث أن

ت = $س_1$ + 2 $س_2$

في ظل القيود الآتية

$س_1$ $\geq$ 200

$س_1$ +$س_2$ $\geq$ 150

$س_1$، $س_2$ $\geq$ صفر

وباستخدام أسلوب السيمبلكس أمكن التوصل لحل هذه المشكلة وهو

$س_1$ = 150 وحدة

$س_2$ = 0 وحدة

ت = 150 جنيهاً

والآن دعنا نفترض أن الطلب على منتجات الشركة لـــم يكــن يخضـــع لخصائص التوزيع الطبيعي، وقد أمكن تقدير مستويات الطلـــب واحتمـــالات حدوثه كما يلي:

مستوى الطلب	الاحتمال
140	0.25
144	0.25
148	0.20
152	0.15
156	0.10
160	0.05

في هذه الحالة فإن القيمة المتوقعة للطلب يمكن حسابها باستخدام معادلـــة القيمة المتوقعة كما يلي:

$$ق_م = 140 \times 0.25 + 144 \times 0.25 + 148 \times 0.20 + 152 \times 0.15 + 156 \times 0.10 + 160 \times 0.05 = 147$$

ومن ثم تحل القيمة الجديدة 147 وحدة محل القيمة القديمة 150 وحدة فـــي القيد الثاني، ويظهر الحل الأمثل للمشكلة باستخدام أسلوب السيمبلكس المعتـــاد كما يلي:

$س_1 = 147$ وحدة

$س_2 = 0$ وحدة

ت = 147 جنيهاً

يلاحظ من النتائج السابقة زيادة تشتت القيم حول وسطها الحسابي (زيـــادة الانحراف المعياري) قد أدى إلى ابتعاد الحل الأمثل من خلال البرنامج اليقيني

(أسلوب السيمبلكس) حيث يبلغ عدد الوحدات الواجب نقلها إلى منفذ التوزيع 147 وحدة بدلاً من 150 وحدة. ويشير ذلك في الواقع إلى أن استخدام أسلوب القيمة المتوقعة إنما يركز على القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي متجاهلاً درجة التباين (مربع الانحراف المعياري) على دقة الحل النهائي للمشكلة. وهنا يثار تساؤل. هل يمكن فرض قيد أو عدة قيود على المشكلة بحيث يأتي الحل الأمثل للمشكلة في حدود درجة تباين معينة للمتغير العشوائي أو المتغيرات العشوائية في مشكلة البرمجة الخطية. وهو ما سوف نتناوله بمزيد من التفصيل في الجزء التالي من هذا الفصل.

(2) التحكم في التباين الكلي

في هذا الجزء سوف نطور حل مشكلة البرمجة الخطية وذلك بالسماح بإمكانية التحكم في درجة التباين في الحل النهائي. وتجدر الإشارة إلى أننا طالما نتعامل مع متغيرات عشوائية. فإن من أهم خصائصها ما يلي:

أ- إذا كان ع متغيراً عشوائياً فإن تباين ع يتم حسابه كما يلي:

$$\sigma^2(\text{ع}) = \text{ق}\,[\text{ع} - \text{ق}\,(\text{ع})]^2$$
$$= \text{ق}\,(\text{ع}^2) - \text{ق}\,(\text{ع})^2$$

ب- إذا كان ل، ع متغيرات عشوائياً ومستقلان كل منهما عن الآخر فإن متباين هذين المتغيرين يساوي مجموع كل منهما كما توضح ذلك المعادلة الآتية:

$$\sigma^2(\text{ل}+\text{ع}) = \sigma^2\,(\text{ل}) + \sigma^2\,(\text{ع})$$

وتعتبر الخاصية الثانية على درجة أهمية عالية ذلك أننا نتعامل في مشاكل البرمجة الخطية على أساس أن المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض، ومن

هذا المنطلق فإن المنطلق فإن التحكم في تباين أحد المتغيرات سيكون بالتـــالي مستقلاً عن التحكم في تباين المتغيرات الأخرى في المشكلة، وعليه إنجاز هذه المهمة عن طريق إضافة قيد (أو قيود) جديد يحدد مستوى التباين المسموح به في الحل النهائي للمشكلة. دعنا نوضح ذلك من خلال المثال التوضيحي الآتي:

<u>**مثـال (1)**</u>

المطلوب تعظيم قيمة الأرباح (ر) حيث ان

$$ر = ر_1 س_1 + ر_2 س_2 + ر_3 س_3$$

بشرط

$$6 س_1 + 8 س_2 + 4 س_3 \le 24$$

$$4 س_1 + 12 س_2 + 8 س_3 \le 40$$

$$س_1 ، س_2 ، س_3 \ge 0$$

فإذا علمت أن معاملات دالة الهدف هي متغيرات عشوائية غـــير مؤكـــدة ومن المتوقع ان تأخذ التوزيعات الاحتمالية الآتية:

التوزيع الاحتمالي لعامل المتغير الأول $س_1$		التوزيع الاحتمالي لعامل المتغير الأول $س_2$		التوزيع الاحتمالي لعامل المتغير الأول $س_3$	
القيمة	الاحتمال	القيمة	الاحتمال	القيمة	الاحتمال
10	0.10	10	0.25	20	0.05
30	0.20	8	0.25	24	0.03
40	0.15	16	0.25	30	0.40
50	0.35	4	0.25	44	0.05
80	0.20			40	0.02
				18	0.45

فإذا كان الانحراف المعياري المسموح به في الحل النهائي يجب ألا يزيد عن 30. المطلوب صياغة مشكلة البرمجة الخطّية التي تأخذ في اعتبارها درجة تشتت المفردات.

الحل

• **القيمة المتوقعة لمعامل المتغير س1**

$= 10 \times 0.10 + 30 \times 0.20 + 40 \times 0.15 + 50 \times 0.35 + 80 \times 0.20$

$= 46.50$

يمكن حساب التباين والانحراف المعياري، حيث يبلغ التباين 422.75 أما الانحراف المعياري = 20.56

• **القيمة المتوقعة لمعامل المتغير س2**

$= 10 \times 0.25 + 8 \times 0.25 + 16 \times 0.25 + 4 \times 0.25$

$= 9.5$

ويبلغ التباين 18.75 والانحراف المعياري 4.33

• **القيمة المتوقعة لمعامل المتغير س3**

$= 20 \times 0.05 + 24 \times 0.03 + 30 \times 0.4 + 44 \times 0.05 + 40 \times 0.02$
$+ 18 \times 0.45 = 24.82$

التباين = 55.84 والانحراف المعياري 7.47.

وفي ضوء النتائج السابقة يمكن إعادة صياغة مشـــكلة الدراســـة علـــى الصورة الآتية:

دالة الهدف

$$ر = 46.5\ س_1 + 9.5\ س_2 + 16.46\ س_3$$

بشرط

$$6\ س_1 + 8\ س_2 + 4\ س_3 \geq 24$$

$$4\ س_1 + 12\ س_2 + 8\ س_3 \geq 40$$

$$20.56\ س_1 + 4.33\ س_2 + 7.47\ س_3 \geq 30$$

$$س_1،\ س_2،\ س_3 \leq 0$$

ويتمثل حل هذه المشكلة في:

$س_1 = 1.46$
$س_2 = 0$
$س_3 = 0$
الأرباح = 67.85

يلاحظ أنه حتى في ظل إخضاع المشكلة والحل النهائي لمستوى معين من التباين، فإن المشكلة مازالت قائمة، وتتمثل في أن الحل الذي يمكن التوصـــل إليه في ظل ظروف عدم التأكد، هو حل تقريبي ومن ثم ينطوي هذا الحل على خطر أن يقع في دائرة الحل غير الممكن. وفي هذا الصدد ينصب اهتمام متخذ القرار على تحديد ذلك المجال الذي يكون ممكناً دائماً.

وهو ما يعرف بطريقة الصياغة المتخمـــة (المعممـــة) .Fat Formation ولإيضاح مضمون هذه الطريقة دعنا نتناول المثال الآتي:

مثال (1)

افترض أننا بصدد مشكلة برمجة خطية تتكون من متغيرين هما $س_1$، $س_2$، وقيد واحد وان القيم المختلفة التي يمكن أن يأخذها الطرف الأيمن للقيد والطرف الأيسر يظهر كما يلي:

قيم معامل $س_1$	قيم معامل $س_2$	قيم الطرف الأيسر للقيد
60	80	240
40	60	480

وكانت دالة الهدف على الصورة الآتية

$$ر = 2\,س_1 + 4\,س_2$$

والمطلوب هو صياغة مجموعة القيود التي تحدد المجال الممكن دائماً لحل هذه المشكلة.

الحل

تتمثل القيود الخاصة بتحديد المجال الممكن دائماً في مجموعة التباديل الخاصة بقيم معاملات كل من $س_1$، $س_2$ كما يلي:

$$240 \geq 80\,س_2 + 60\,س_1$$

$$480 \geq 80\,س_2 + 60\,س_1$$

$$240 \geq 60\,س_2 + 60\,س_1$$

$$480 \geq 60\,س_2 + 60\,س_1$$

$$240 \geq 80\,س_2 + 40\,س_1$$

$$480 \geq 80\,س_2 + 40\,س_1$$

$$240 \geq 60\,س_2 + 40\,س_1$$

$$480 \geq 60\,س_2 + 40\,س_1$$

ويلاحظ أن المجال الذي ينتج عن تفاعل هذه القيود مجتمعة، هــو ذلــك المجال الذي يظل ممكناً دائما، بغض النظر عن القيم التي يمكن أن يبدو عليها الطرف الأيمن او الكرف الأيسر للقيد.

أما الملاحظة الثانية، فهي أننا قد حولنا المشكلة من مشكلة احتمالية (غـير مؤكدة) إلى مشكلة مؤكدة ذات حجم كبير وعلينا أن نختار بين حل المشــكلة الأصلية أو المشكلة المقابلة. وتظل طريقة Fat Formation تعبر من وجهة نظر في مواجهة حالة عدم التأكد أو عدم اليقين.

ويمكن حل المشكلة السابقة بيانياً في المثال السابق.

القيد الأول

اجعل $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 3$ (0، 3)

اجعل $س_2 = 0$ ∴ $س_2 = 4$ (4، 0)

القيد الثاني

اجعل $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 6$ (0، 6)

اجعل $س_2 = 0$ ∴ $س_2 = 8$ (8، 0)

القيد الثالث

اجعل $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 4$ (0، 4)

اجعل $س_2 = 0$ ∴ $س_2 = 4$ (4، 0)

القيد الرابع

اجعل $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 8$ (0، 8)

اجعل $س_2 = 0$ ∴ $س_2 = 8$ (8، 8)

القيد الخامس

اجعل $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 3$ (0، 3)

اجعل $س_2 = 0$ ∴ $س_2 = 6$ (6، 0)

القيد السادس

اجعل $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 6$ (0، 6)

اجعل $س_2 = 0$ ∴ $س_2 = 12$ (12، 0)

القيد السابع

اجعل $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 4$ (0، 4)

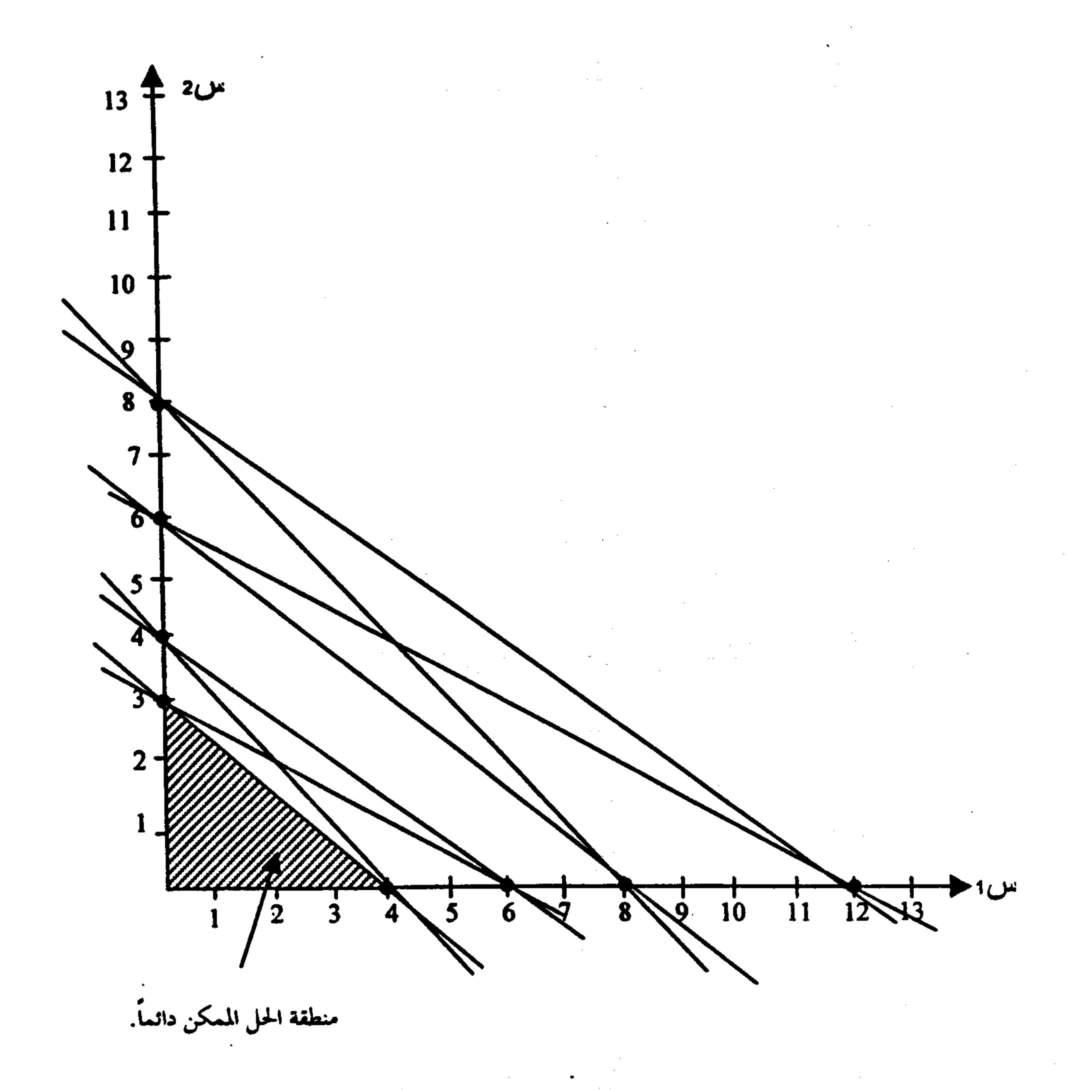
اجعل $س_2 = 0$ ∴ $س_2 = 6$ (6، 4)

القيد الثامن

اجعل $س_1 = 0$ ∴ $س_2 = 8$ (0، 8)

اجعل $س_2 = 0$ ∴ $س_2 = 12$ (12، 0)

ويوضح الشكل رقم (9-3) الحل البياني لهذه المشكلة ومنطقة الحل الممكنة دائماً



أما عن الحل الأمثل لهذه المشكلة أسلوب السيمبلكس فيتمثل في:

إنتاج عدد 3 وحدات من المنتج س1

عدم إنتاج أي وحدات من المنتج س2.

الفصل الحادي عشر

نماذج المحاكاة

Simulation Models

الفصل الحادي عشر

نماذج المحاكاة

Simulation Models

مقدمة

يزخر واقعنا بالعديد من نماذج المحاكاة، فشركة بوينج للطائرات تستخدم نماذج المحاكاة لاختبار خصائص الديناميكا الهوائية Aerodynamics للطائرات النفاثة، كذلك تستخدم العديد من قوات الدفاع والجيش في الدول محاكاة خطط الحروب عن طريق ألعاب الكومبيوتر، كذلك تستخدم العديد من الجامعات والمعاهد أسلوب المحاكاة بتعليم الطلاب فنون إدارة منظمات الأعمال في أسواق تنافسية. وفي مصر تستخدم بورصة الأوراق المالية نظاماً تعليمياً يعتمد على المحاكاة للتدريب والتعليم لكيفية التجار في الأوراق المالية وتكوين وإدارة المحافظ يطلق عليه Stock Rider. والسؤال الذي يثار الآن، ما هي المحاكاة؟

المحاكاة هي محاولة لتطبيق خصائص ومظاهر النظم الواقعية في شكل نماذج تقترب بشدة وتعطي تصوراً دقيقاً للواقع ومشاكله. ومن ثم يمكن تصميم ودراسة وضع حلول للمشاكل المرتبطة بالنظم في الواقع العملي.

سوف نوضح في هذا الفصل كيف يمكن استخدام المحاكاة كجزء من نظام إدارة العمليات، وذلك ببناء نماذج رياضية تمثل بشكل دقيق النظم في الواقع العملي. وكيف يمكن استخدام هذه النماذج لدراسة وتقدير

الآثار المختلفة لتصرفات معينة من المحتمل أن يتعرض لها أو يسلكها النظام، وتكمن الفكرة الأساسية للمحاكاة في أنها تمثل:

1- محاكاة الواقع وحالاته المختلفة رياضياً.

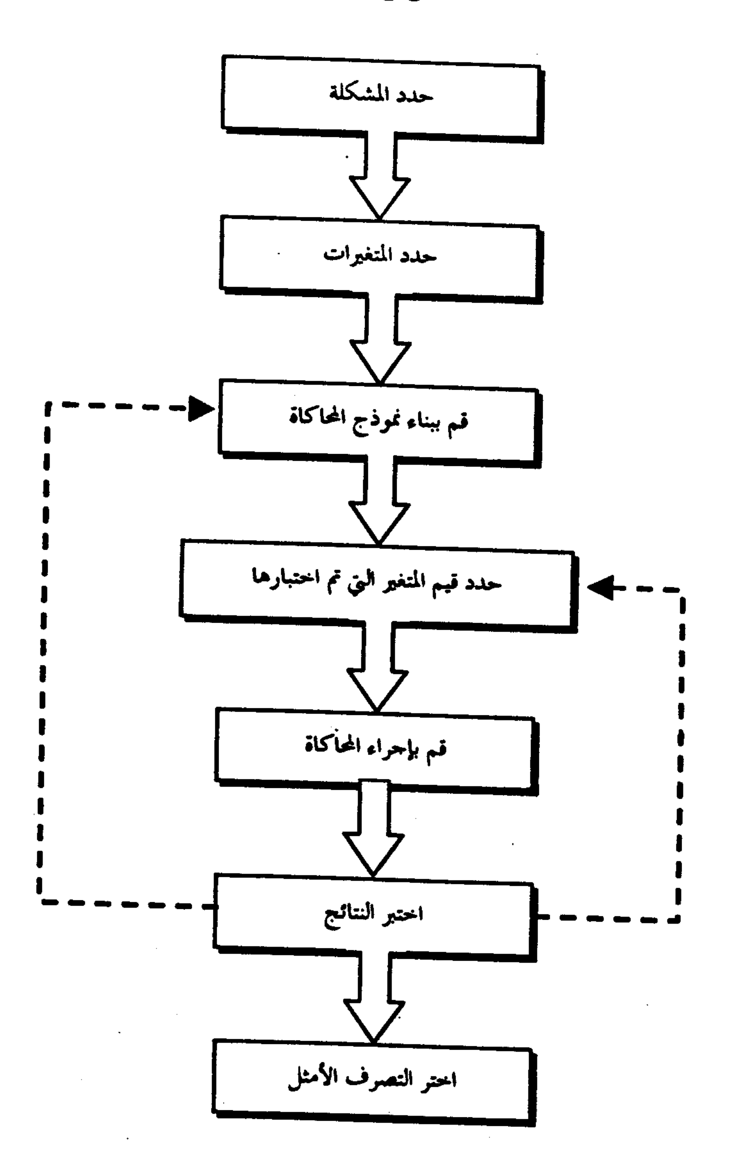
2- دراسة خصائص وصفات التشغيل.

3- استخلاص مقومات النظام واتخاذ القرارات المبينة على نتائج المحاكاة.

وبهذا الأسلوب لا يتم تنفيذ النظم في الواقع حتي يتم تحديد المزايا والعيوب من خلال المحاكاة ولكي يمكن استخدام أسلوب المحاكاة على مدير الإنتاج والعمكليات اقتفاء الخطوات الآتية:

1- عرف وحدد المشكلة.
2- حدد المتغيرات الهامة المرتبطة بالمشكلة.
3- قم ببناء نموذج رقمي (رياضي).
4- حدد الطرق المختلفة للاختبار.
5- نفذ تجربة واختبار النموذج.
6- استخدم النتائج في تعديل النموذج.
7- حدد أفضل التصرفات الممكن الاعتماد عليها واستخداماتها.

شكل رقم [11-1]


حدد المشكلة
حدد المتغيرات
قم ببناء نموذج المحاكاة
حدد قيم المتغير التي تم اختبارها
قم بإجراء المحاكاة
اختبر النتائج
اختر التصرف الأمثل

مزايا وعيوب المحاكاة

المحاكاة هي أداة تلقي قبولاً من المديرين للعديد من الأسباب منها:

- المحاكاة أسلوب يتصف بأنه مباشر ومرن.
- تستخدم المحاكاة لتحليل كثيراً من الحالات المعقدة في الواقع العملي، والتي يصعب حلها باستخدام نماذج إدارة العمليات.
- يمكن من خلال المحاكاة استخدام أي توزيعات احتمالية يمكن للمستخدم تحديدها وليس من الضروري الاقتصار على توزيعات محددة.
- اختصار الوقت Time Compression فمن خلال الحاسبات الآلية يمكن إجراء المحاكاة، واختصار السنين إلى أيام وأسابيع.
- تسمح المحاكاة بإثارة التساؤلات من النوع "ماذا يحدث لو؟" مما يساعد المدير في الاختيارات الأكثر جانبية وقبولاً.
- تتيح المحاكاة فرصة لتجربة العديد من الأدوات والوسائل والسياسات قبل تنفيذها في الواقع.
- تسمح المحاكاة بتحديد ودراسة الآثار المتبادلة للمكونات أو المتغيرات بالشكل الذي يسمح بتحديد أكثرها أهمية للنظام.

وعلى الرغم من المزايا السابقة، وقبول المحاكاة كأداة لدراسة المشاكل وتطوير حلول متقدمة لها، فإنها لا تخلو من جوانب قصور عديدة منها:

- تتطلب نماذج المحاكاة الجيدة تكاليف مرتفعة، وقد تستغرق سنوات لتصميمها وبناءها.
- لا تقدم المحاكاة حلولاً مثلى للمشاكل مثل أسلوب البرمجة الخطية مثلاً، إذ أنها أسلوب يقوم على التجربة والخطأ، ومن ثم يتولد لدعم المحاكاة حلولاً عدة مع كل محاولة.

- نماذج المحاكاة لا تولد حلولاً من ذاتها، بل على المدير أن يحدد الظروف والقيود التي يرغب في اختبارها.
- يمثل كل نموذج للمحاكاة أسلوباً منفرداً، ومن ثم لا يمكن تحويل الحلول والاستدلالات من نموذج تصميم لمشكلة معينة إلى مشكلة أخرى.

المحاكاة باستخدام أسلوب "مونت كارلو"

يستخدم أسلوب "مونت كارلو" عندما يتضمن النظام عناصر واضحة لها فرصة للتأثير في سلوك النظام، وهذا يشير في الواقع إلى أن أسلوب "مونت كارلو" هو أسلوب احتمالي، يقوم على تجربة الفرص المحتملة من خلال معاينة عشوائية، ويمكن تقسيم أسلوب "مونت كارلو" إلى خمسة خطوات:

1- تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغيرات الهامة في النظام.
2- تحديد التوزيع الاحتمالي لكل متغير.
3- تحيد مدى من الأرقام العشوائية لكل متغير.
4- توليد الأرقام العشوائية.
5- القيام بالمحاكاة لسلسلة من المحاولات.

وسوف نتناول الخطوات السابقة بشيء من التفصيل فيما يلي:

أولاً: تحديد التوزيع الاحتمالي

تقوم الفكرة الأساسية لأسلوب"مونت كارلو" على توليد قيم لمتغيرات النموذج التي سيتم دراستها، ويوجد العديد من المتغيرات التي تأخذ الصفة الاحتمالية في الواقع العملي مثل:

- الطلب اليومي أو الأسبوعي من المخزون.

- الزمن المنقضي بين الأعطال التي تتعرض لها آلة معينة.
- الأزمنة المنقضية بين الوحدات التي تصل لتلقي خدمة معينة.
- أوقات أداء الخدمة.
- الأوقات اللازمة لإنجاز أنشطة مشروع معين.
- عدد العمال الذين يتغيبون عن العمل كل يوم.

والأسلوب الأمثل لتحديد التوزيع الاحتمالي لمتغير معين، يتمثل في اختبار سلسلة القيم التاريخية لهذا المتغير، حيث يتم تحديد الاحتمال أو التكرار النسبي، وذلك بقسمة عدد التكرارات أو الملاحظات على إجمالي عدد المشاهدات أو التكرارات.

والآن ...

دعنا نوضح فكرة المحاككاة من خلال مثال مبسط للتنبؤ بالطلب لأحد الشركات.

مثال (1)

ظهرت بيانات الطلب الفعلي خلال الأيام العشرة الماضية لشركة المنسوجات الحديثة كما يلي:

اليوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الطلب	3	3	4	4	5	5	2	3	5	5

من خلال البيانات السابقة يمكن القول بأن الطلب المتوقع يعادل 3.9 وحدة $\left(\frac{5+5+3+2+5+5+4+4+3+3}{10}\right)$

ويمكن استخدام أسلوب المحاكاة في شكله البسيط للتنبؤ بحجم الطلب المتوقع أيضاً، وذلك بتحديد مجموعة الأرقام العشوائية ــ ويتم اختيار 10 أرقام عشوائية من جدول الأرقام العشوائية ــ ثم يتم بعد ذلك تحويلها

إلى احتمالات أو أوزان نسبية ــ حيث يتم استخدامها في تحديد الطلــب المتوقع، ويلاحظ أنه يجب استخدام عدد كبير من المحـــاولات لتقديــر الطلب المتوقع، إذ أنه كلما زاد عدد المحاولات زادت دقة النتائج التـــي نتوصل إليها.

المحاولة الأولى

الأيام	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	86	0.185	0.555
2	3	76	0.163	0.488
3	4	20	0.044	0.179
4	4	6	0.013	0.052
5	5	42	0.091	0.456
6	5	50	0.107	0.536
7	2	31	0.067	0.134
8	3	77	0.167	0.500
9	5	33	0.072	0.359
10	5	41	0.089	0.447
		46	1	3.71

المحاولة الثانية

الأيام	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	81	0.136	0.41
2	3	57	0.195	0.29
3	4	19	0.033	0.13
4	4	91	0.152	0.61
5	5	90	0.150	0.75
6	5	40	0.067	0.34
7	2	7	0.12	0.02
8	3	77	0.128	0.38
9	5	74	0.123	0.62
10	5	62	0.104	0.52
		603	1	4.06

المحاولة الثالثة

الأيام	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	14	0.027	0.082
2	3	86	0.166	0.499
3	4	88	0.169	0.677
4	4	30	0.058	0.233
5	5	50	0.097	0.486
6	5	32	0.062	0.308
7	2	83	0.161	0.321
8	3	50	0.097	0.29
9	5	72	0.139	0.697
10	5	12	0.024	0.118
		522	1	3.71

من خلال المحاولات الثلاث السابقة، فإن متوسط الطلب المتوقع يبلغ 3.83 ($\frac{3.71+4.06+3.71}{3}$)، ولا شك أن هذا الرقم يقترب من متوسط الطلب والبالغ 3.9 وحدة ولا شك أيضاً أن زيادة عدد المحاولات للمحاكاة ستؤدي إلى دقة أعلى في رقم الطلب المتوقع.

مثال (2)

يوضح الجدول رقم [11-1] الطلب اليومي على إطارات السيارات لإحدى الشركات خلال المائتي يوم الماضية، ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد احتمالات حدوث كل مستوى من مستويات الطلب والاحتمالات المتجمعة كما يوضح ذلك الأعمدة 3، 4 من نفس الجدول.

الطلب على الإطارات	تكرار الطلب	احتمالات الحدوث	الاحتمال المتجمع
0	10	0.05-200/10	0.05
1	20	0.10-200/20	0.15
2	40	0.20-200/40	0.35
3	60	0.30-200/60	0.65
4	40	0.20-200/40	0.85
5	30	0.15-200/30	1.00
	200 يوم	1	

ثانياً: تحديد التوزيع الاحتمالي لكل متغير

يتم تحديد الاحتمال المتجمع كما يوضح ذلك الجدول [11-1] عـــن طريق إضافة الاحتمالات الحالية للاحتمالات السابقة باستمرار.

ثالثاً: تحديد مدى الأرقام العشوائية

بمجرد تحديد الاحتمالات المتجمعة لكل متغير فإنه يجب تخصيـص مجموعة من الأرقام لتمثل كل قيمة من القيم الممكنة للمتغـــير، والتـي يشار إليها بالمدى من الأرقام العشوائية، والأرقام العشوائية هي مجموعة من الأرقام مثل (1، 2، 9، 15، ...) يتم اختيارها بشكل عشوائي.

ولتوضيح فكرة تحديد مدى الأرقام العشوائية، دعنا نفترض أن هناك فرصة 5% لأن يكون الطلب صفر في عدد ما من الأيام، كما يوضـــح ذلك المثال رقم [11-2].

فمعنى ذلك أننا نرغب في تحديد 5% من الأرقام العشوائية المتحـــة لتكون مناظرة لطلب مقداره صفراً، فإذا ما كان مجموع 100 رقم مكون من عددين هو المستخدم في توليد الأرقام العشوائية، فإنه يمكن اختيـــار أول خمسة أرقام عشوائية لتناظر احتمال أن يبلغ الطلب صفراً في أحـــد الأيام. وهكذا. ويظهر الجدول رقم [11-2] المدى بين الأرقام العشـوائية المناظر لكل مستوى من الاحتمالات المتجمعة.

الطلب اليومي	الاحتمال	الاحتمال المتجمع	المدى من الأرقام العشوائية
0	0.05	0.05	0 إلى 5
1	0.10	0.15	6 إلى 15
2	0.20	0.35	16 إلى 35
3	0.30	0.65	36 إلى 65
4	0.20	0.85	66 إلى 85
5	0.15	1.00	86 إلى 100

رابعاً: توليد الأرقام العشوائية

الأرقام العشوائية، هي جميع الأرقام التي يتم توليدها مـــن الأرقـــام الأساسية وهي صفر حتى 9، وبحيث يكون هناك فرصة متساوية، وعادة ما يتم الاستعانة ببرامج للحاسب الآلي لتوليد هذه الأرقام خاصة إذا كنـــا في حاجة لتوليد حجم كبير من الأرقام العشوائية ويوضح الجدول رقـــم [11-3] قطاعاً من جدول للأرقام العشوائية.

جدول رقم [11-3]: قطاع من احد جداول الأرقام العشرية

52	06	50	88	53	30	10	47	99	37	66	91	35	32	00	84	57	07
37	63	28	02	74	35	24	03	29	60	74	85	90	73	59	55	17	60
82	57	68	28	50	94	03	11	27	79	90	87	92	41	09	25	36	77
69	02	36	49	71	99	32	10	75	21	95	90	94	38	97	71	72	49
98	94	90	36	60	78	23	67	89	85	29	21	25	73	69	34	85	76
96	52	62	86	49	56	59	23	78	71	72	90	57	01	68	57	31	95
33	69	27	21	11	60	95	89	68	48	17	89	34	09	63	50	44	51
50	33	50	95	13	44	34	62	64	39	55	29	30	04	46	44	30	16
88	32	18	50	62	56	43	56	62	31	15	40	90	34	51	95	26	14
90	30	36	24	69	82	51	74	30	35	36	85	01	55	62	64	09	85
50	48	61	18	85	23	08	54	17	12	80	69	24	84	62	16	49	59
27	88	21	62	69	64	48	31	12	73	02	68	00	16	16	46	13	85
45	14	48	32	13	49	66	62	78	41	86	98	92	98	84	54	33	40
81	02	01	78	82	74	97	37	45	31	94	99	42	49	27	64	89	42
66	83	14	74	29	76	03	33	11	97	59	81	72	00	94	61	13	52
74	05	81	82	93	90	69	33	52	78	13	06	28	30	64	23	37	39
30	34	87	01	94	11	48	82	59	94	25	34	32	23	17	01	58	73
59	55	72	33	62	13	74	68	22	44	42	09	32	46	71	79	45	89
67	09	80	98	99	25	77	50	03	32	36	63	65	75	64	19	95	88
60	77	46	63	71	69	44	22	03	85	14	48	69	13	30	50	33	24
60	08	19	29	36	72	30	27	50	64	85	72	75	29	87	05	75	01
80	45	86	99	02	43	87	08	86	84	49	76	24	08	01	86	29	11
53	84	49	63	26	65	72	84	85	63	26	02	75	28	62	62	40	67
69	84	12	98	51	36	17	02	15	29	16	52	56	43	29	22	08	62
37	77	13	10	02	18	13	19	32	85	31	94	81	43	31	58	33	51

* Source: Excerpted from A million Digits with 100,000 Normal Divests. The Free Press, 1955 P.7 with permission of the Rand. Corporation.

خامساً: محاكاة التجربة

يمكن القيام بمحاكاة نواتج التجربة عن طريق أرقام عشوائية مـــــن جدول الأرقام العشوائية، وذلك بالبدء من أي موقع في جـــدول الأرقـــام العشوائية فمثلاً إذا كان الرقم العشوائي الذي تم اختياره هو 81، وكـــان المدى بالنسبة للطلب اليومي على أربعة إطارات هو 65 إلى 8[illegible]. فمعنى

ذلك أننا سوف نختار أو نتوقع أن الطلب اليومي على الإطـــارات هـــو أربعة إطارات.

إفترض أن نرغب في محاكاة الطلب عدة أيـــام لشـــركة إطـــارات السيارات، وقد قمنا باختيار الأرقام العشوائية، من جداول رقـــم [11-3] حيث بدأنا اختيار الأرقام العشوائية من أول رقم في الجـــانب الأيســـر العلوي. فما هو متوسط الطلب اليومي في هذه الحالة؟ يلاحـــظ ظـــهور الطلب المتوقع خلال العشرة أيام السابقة كمـــا يوضـــح ذلـــك الجـــدول رقم [11-4].

الجدول رقم [11-4]

عدد الأيام	محاكاة الطلب اليومي	ملاحظة
1	3	← الرقم العشوائي هو 52 يقع في المدى مـــن 36 إلى 65 والذي يناظر مبيعات تبلـــغ 3 وحدات
2	3	
3	4	← الرقم العشوائي هو 98 يقع في المدى من 86 إلى 100 والذي يناظر مبيعات تبلـــغ 5 وحدات
4	4	
5	5	
6	5	
7	2	
8	3	
9	5	
10	5	
المجموع	39	

الطلب اليومي المتوقع = 0.05 × صفر = صفر

0.1 = 1 × 0.10 +

0.4 = 2 × 0.20 +

0.9 = 3 × 0.30 +

0.8 = 4 × 0.20 +

0.75 = 5 × 0.15 +

2.95 =

ومن ثم فإذا قمنا بإجراء المحاكاة لمئـــات أو آلاف المـــرات فـــإن متوسط الطلب باستخدام المحاكاة سوف يقـــترب كثـــيراً مـــن الطلـــب اليومي المتوقع.

يوضح الجدول رقم [11-5] محاولات لمحاكاة الطلب، حيث أظهرت النتائج انخفاض الطلب المتوقع من 3.9 وحدة (باستخدام محاولة محاكاة واحـــدة) إلى 2.7 وحـــدة (باستخدام 7 محاولات للمحاكاة) وهو ما يشير إلى إجراء المحاكاة لعدد كبير من المحاولات يضمن إلى رقم دقيق للطلب المتوقع.

جدول رقم [11-5] نتائج عدة محاولات لمحاكاة الطلب

الأيام	المحاولة (1)		المحاولة (2)		المحاولة (3)		المحاولة (4)		المحاولة (5)		المحاولة (6)		المحاولة (7)	
	الرقم العشوائي	الطلب	الرقم العشوائي	الطلب	الرقم العشوائي	الطلب	الرقم العشوائي	الطلب	الرقم العشوائي	الطلب	الرقم العشوائي	الطلب	الرقم العشوائي	الطلب
1	92	5	12	1	1	0	2	0	0	0	44	3	85	4
2	91	5	80	4	27	2	5	3	11	1	37	3	61	3
3	59	3	2	0	1	0	90	5	10	1	50	3	90	5
4	11	1	36	3	97	5	87	4	58	3	17	2	60	3
5	54	3	95	5	89	5	20	2	59	3	67	4	57	3
6	72	1	86	5	23	2	22	2	70	4	38	3	47	3
7	87	5	42	3	23	2	77	4	81	4	24	2	40	3
8	15	1	40	3	67	4	23	2	3	0	39	3	14	1
9	24	2	20	2	12	1	32	2	66	4	17	2	23	2
10	87	5	63	3	81	4	95	5	19	2	9	1	10	1
المجموع		31		29		25		29		22		26		28
المتوسط		3.1		2.9		2.5		2.9		2.2		2.6		2.8

وقد تم إجراء المحاكاة باستخدام الحاسب الآلي للمشكلة السابقة حيث تم إجراء 300 محاولة* توصلنا بعدها إلى الطلب المتوقع تقريباً. ويوضح الشكل رقم [11-1] مخرجات الحاسب الآلي والتي توضح أن الطلب المتوقع بعد 300 محاولة بلغ 2.99 وحدة.

شكل رقم [11-1]: المحاكاة باستخدام الحاسب الآلي

Program Simulation

***** INPUT DATA ENTERED *****

Monte Carlo Simulation

Category Distribution

Value	Probability
0.00	0.05
1.00	0.10
2.00	0.20
3.00	0.30
4.00	0.20
5.00	0.15

Number of Simulation runs: 300

استخدام المحاكاة في حل مشاكل نظرية الصفوف

تمثل صفوف الانتظار أحد مجالات إدارة العمليات التي يمكن استخدام أسلوب المحاكاة في حل مشاكلها وتطبيقاتها. بل وقد تعتبر

* : لم يستغرق ذلك على الحاسب الآلي بضع ثواني وقد تم استخدام برنامج Manager لهذا الغرض.

المحاكاة الأسلوب الوحيد الذي يمكن من خلاله تحليل صفوف الانتظار في الواقع العملي، بعيداً عن القيود التي تتطلبها النماذج الرياضية لصفوف الانتظار والتي عرضنا لها في فصل سابق، ولتوضيح كيفية استخدام المحاكاة في حل مشاكل صفوف الانتظار سوف نتناول المثال الآتي:

مثال (3)

يستقبل فندق "عين الحياة" الذي يقع على إحدى ضفاف النيل الساحرة في أسوان زواره ليلاً من القادمين عبر النيل من محافظات أخرى لقضاء سهرات ليلية صيفية. وقد قدر مدير التسويق في الفندق عدد الزوار القادمين واحتمالات ذلك لكل ليلة من ليالي شهر يونيو، كما يوضح ذلك الجدول رقم [11-5]

جدول رقم [11-5]

عدد النزلاء	الاحتمال	الاحتمال المتجمع	مدى الأرقام العشوائية
0	0.13	0.13	صفر إلى 13
1	0.17	0.30	14 إلى 30
2	0.15	0.45	31 إلى 45
3	0.25	0.70	46 إلى 70
4	0.20	0.90	71 إلى 90
5	0.10	1	91 إلى 100
	1.00		

وتشير طبيعة العمل أن عدد مراكب الرحلات غير الكاملة العدد تختلف من يوم ليوم آخر، وبالتالي سوف تنتظر المركب غير ماملة العدد في يوم معين إلى يوم التالي لكي يكتمل عدد النزلاء، وقد أمكن تحديد احتمالات عدم اكتمال إعداد مراكب الرحلات كما يوضح ذلك الجدول رقم [11-6].

معدلات عدم اكتمال الإعداد	الاحتمال	الاحتمال المتوقع	المدى من الأرقام العشوائية
1	0.05	0.05	1 إلى 5
2	0.15	0.20	6 إلى 20
3	0.50	0.70	21 إلى 70
4	0.20	0.90	71 إلى 90
5	0.10	1	91 إلى 100
	1		

وقد قرر مدير التسويق قبل أن تغادر مراكب الرحـــلات ومرســى الأقصر متجه إلى أسوان بإجراء محاكاة للمسافة يوم القادمة، واقتصــر في الرحلة الأولى من التحليل على الخمسة عشر يوماً الأولى. وقد تـــم تحديد الأرقام العشوائية من جدول الأرقام العشوائية. حيث أمكن تحديــد معدلات الوصول اليومي. ومن ثم معدلات عدم التحميل الكـــامل كمــا يوضح ذلك الجدول رقم [11-7].

جدول رقم [11-7]

اليوم	عدد التأخيرات اليوم السابق	الأرقام العشوائية	عدد الوحدات	مجموع المراكب غير المكتملة	الأرقام العشوائية	عدد المراكب غير المكتملة
1	(1) -	52	3	3	37	3
2	0	6	0	0	63	(2) 0
3	0	50	3	3	28	3
4	0	88	4	4	2	1
5	3	53	3	6	74	4
6	2	30	1	3	35	3
7	0	10	0	0	24	(3) 0
8	0	47	3	3	3	1
9	2	99	5	7	29	3
10	4	37	2	6	60	3
11	3	66	3	6	74	4
12	2	91	5	7	85	4
13	3	35	2	5	90	(4) 4
14	1	32	2	3	73	3
15	0	0	5	5	59	3
	20 إجمالي التأخير		41 عدد مراكب الوصول			39 عدد غير المكتملة

تفسير الأرقام الواردة بالجدول [11-7]

1- يمكن أن نبدأ بفرض عدم وجود تأخير على الإطلاق عـــن اليــوم السابق، حيث يجب التنبيه إلى أنه مثلاً في حالات أن المحاكاة لعدد كبير جداً من الأيام، فإن البدء بفرض وجود تأخير بمبلغ 5 أيام عن اليوم السابق سوف لا يكون له قيمة كبيرة.

2- من الممكن وجود ثلاث مراكب غير مكتملة في اليوم الثاني، ولكـــن بسبب عدم وجود إعداد سوف تصل من الركاب في نفس اليــــوم، فسوف لا يحدث شيء بالنسبة لمشكلة عدم اكتمال أعداد المراكب.

3- نفس الحالة التي أشرنا إليها في رقم (2).

4- يلاحظ أن عدد المراكب التي من الممكن أن تكون غير مكتملة العدد في هذا اليوم هي 4 مراكب، ولكن نظراً لأن عدد المراكب غـــير مكتملة العدد المنتظرة في الصف تبلغ 3 مراكب فقد تم تسجيل عدد 3 مراكب غير مكتملة في العمود الأخير.

من خلال بيانات الجدول رقم [11-7] فإن مدير التسويق والمراقبين لحركة المراكب والركاب سوف يهتمون بالمعلومات الآتية:

(1) متوسط عدد المراكب المتأخرة لليوم التالي = $\frac{\text{20 تأخير}}{\text{15 يوم}}$

= 1.33 مركب تتأخر لكل يوم.

(2) عدد الوحدات التي تصل = $\frac{\text{41 وحدة وصول}}{\text{15 يوم}}$

= 2.73 وحدة وصول لكل يوم.

(3) متوسط عدد المراكب غير المكتملة لكل يوم = $\frac{39}{\text{15 يوم}}$

= 2.6 مركب كل يوم.

لا شك أن تحليل النتائج السابقة يساعد في تحديد القرارات المناسبة فيما يتعلق بتكاليف التأخير، وتكاليف استئجار وحدات (مراكب) إضافية في بعض الأيام.

استخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون

تفترض نماذج المخزون في ظل ظروف التأكد Deterministic Models أن كل من الطلب على المنتج والوقت اللازم لإعادة الطلب محدد وثابت على الرغم من أن الواقع العملي يشير إلى غير ذلك ومن ثم يصبح تحليل المحاكاة لمثل هذا الموقف هام للغاية. وفي هذا الجزء سوف نعرض لأحد مشاكل المخزون لأحد مخازن التجزئة، حيث يرغب المدير في تحديد حجم الطلبية ونقطة إعادة الطلب لأحد المنتجات والتي يتصف الطلب اليومي عليها بأنه غير مؤكد. ويرغب مدير المخازن في إجراء عدد من محاولات المحاكاة كل من حجم الطلبية ونقطة إعادة الطلب ــ وذلك بهدف تدنية التكلفة الكلية للمخزون لهذا المنتج، ولقد استطاع مدير المخازن من خلال متابعة 300 جنيه للمبيعات من المنتج أن يتعرف على نمط المبيعات كما يظهر ذلك الجدول رقم [11-8] كذلك استطاع مدير المخازن تحويل التكرارات إلى احتمالات كما يوضح الجدول السابق.

جدول رقم [11-8]

الطلب على المنتج	التكرارات	الاحتمال	الاحتمالات المتجمعة	المدى من الأرقام العشوائية
0	15	0.05	0.05	1 إلى 5
1	30	0.10	0.15	6 إلى 15
2	60	0.20	0.35	16 إلى 35
3	120	0.40	0.75	36 إلى 75
4	45	0.15	0.90	76 إلى 90
5	30	0.10	1	91 إلى 100
	300 يوم	1		

يشير الواقع أيضاً إلى طلب كميات أخرى من المنتج تحتاج بين يوم واحد وثلاثة أيام لكل تصل إلى المخازن، ويوضح الجدول رقم [11-9] الاحتمالات.

والمدى من الأرقام العشوائية لإعادة الطلب والأزمنة اللازمة له:

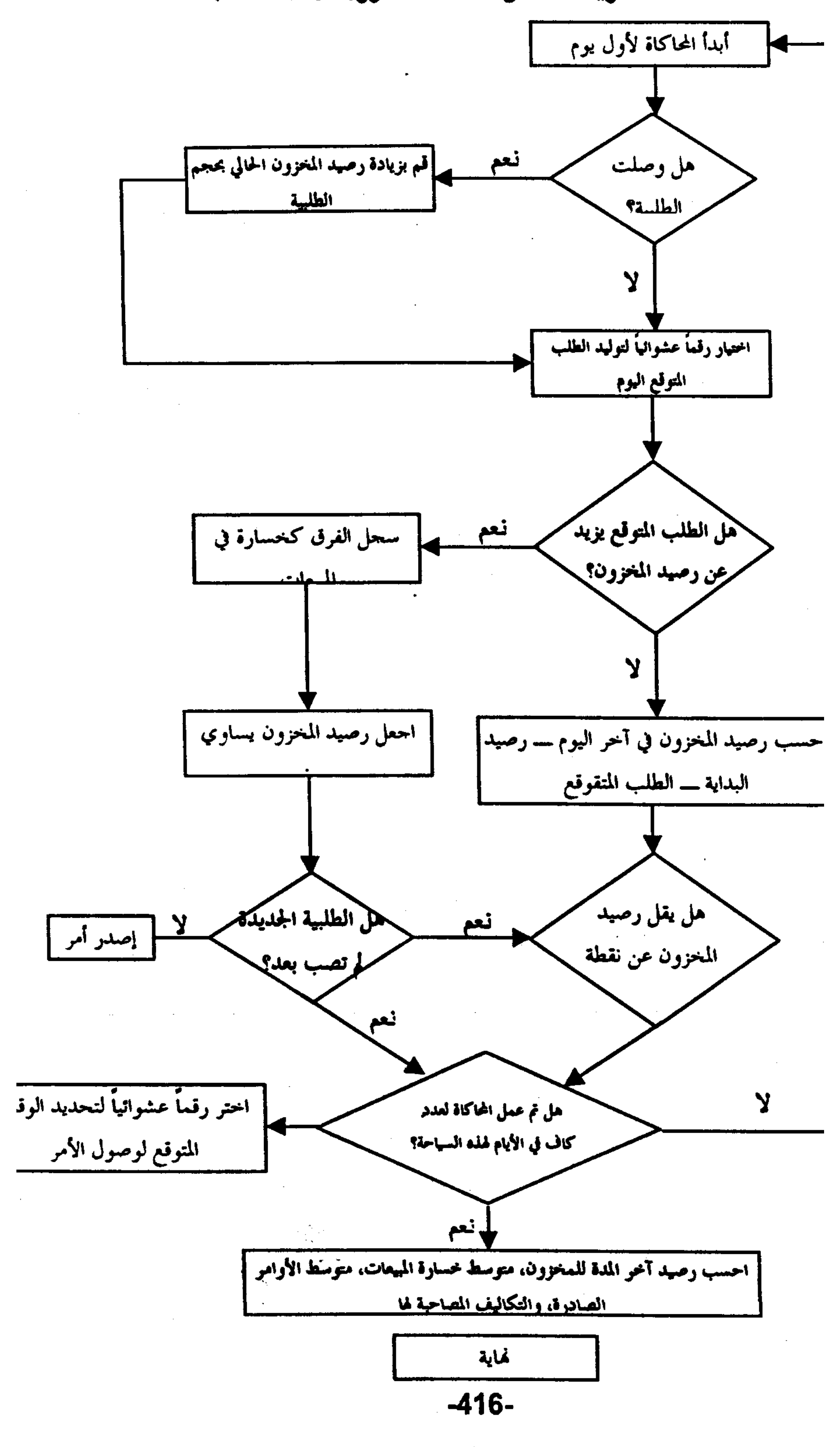
الوقت المطلوب بالأيام	التكرارات	الاحتمال	الاحتمالات المتجمعة	المدى من الأرقام العشوائية
صفر	10	0.20	0.20	1 إلى 20
1	25	0.50	0.70	21 إلى 70
2	15	0.30	1	71 إلى 100
3	50 أمر	1		

والآن إذا ما رغب مدير المخازن في محاكاة حجم طلبية يقدر بـ 10 وحدات وبنقطة إعادة طلب تبلغ 5 وحدات. فمعنى ذلك أنه بلغ حجم المخزون من المنبع في يوم ما 5 وحدات أو أقل، كان المدير سيطلب من المورد طلبية جديدة 10 وحدات، فإذا كان الوقت اللازم لوصول الطلبية Lead Time يبلغ يوم واحد، فمعنى ذلك أن الطلبية الجديدة لن تصل صباح اليوم التالي بل ستصل في صباح بعد غد .. وهكذا. ويوضح الشكل رقم [11-2] المنطق وراء عملية المحاكاة من خلال خريطة التدفق Flow Chart والتي تفيد عند تصميم برنامج على الحاسب لهذه المشكلة. والتي تشير إلى أن عملية محاكاة رصيد المخزون وحجم الطلبية ونقطة إعادة الطلب يمكن أن تمر بالخطوات الآتية:

1- أبدأ المحاكاة كل يوم بالتأكد من أن الكمية المطلوبة قد وصلت بالفعل فإذا كان ذلك صحيحاً، أضف الكمية المطلوبة إلى رصيد المخزون الحالة (افترض أنه 10 وحدات في مثالنا).

2- قم بتحديد الطلب اليومي وذلك باختيار رقماً عشوائياً.

خريطة التدفق لمحاكاة المخزون من أحد المنتجات



3- احسب مخزون آخر الفترة (آخر اليوم) والذي يعادل رصيد المخزون في بداية اليوم – الطلب اليومي. فإذا كا

4- حدد اليوم الذي يصل فيه مستوى المخزون إلى نقطة إعادة الطلب (5 وحدات في مثالنا)، فإذا ما كان رصيد المخزون قد تصل إلى نقطة إعادة الطلب أو أقل منها قم بإصدار أمر بطلبية جديدة. ثم ق بمحاكاة الوقت اللازم لوصول الطلبية الجديدة وذلك باختي رقماً عشوائياً.

ويشير تطبيق الخطوات السابقة إلى النتائج الواردة بجدول رقم [11-9]

جدول رقم [11-9]

المحاولة الأولى للمحاكاة لحجم طلبية يبلغ 10 وحدات ونقطة إعادة طلب 5 وحدا

يام	الوحدات التي تم استلامها	رصيد المخزون في البداية	الأرقام العشوائية	الطلب	مخزون آخر المدة	المبيعات الضائعة	إصدار أمر	الرقم العشوائي
1	-	10	6	1	9	0	لا	
2	0	9	63	3	6	0	لا	
3	0	6	57	3	1 3	0	نعم	2 2
4	0	3	3 94	5	0	2	4 لا	
5	10	10	52	3	7	0	لا	
6	0	7	69	3	4	0	نعم	3 3
7	0	4	32	2	2	0	لا	
8	0	3	30	2	0	0	لا	
9	6 10	10	48	3	7	0	لا	
10	0	7	88	4	3	0	نعم	0 14
					41	2		

تفسير الأرقام الواردة بالجدول [11-9]

1- المرة الأولى التي ينخفض فيها رصيد المخزون إلى مستوى أقل من حد الطلب (نقطة إعادة الطلب)، ولك يكن هناك أوامر صدرت بكميات من الصنف قبل ذلك. ولذلك يجب إصدار أمر بطلبية جديدة (مقدارها 10 وحدات) من الصنف (المنتج).

2- الرقم العشوائي 2 تم توليده ليمثل الوقت اللازم لوصول طلبية جديدة وقد تم تحديده من الجدول رقم [11-9] من العمود الثاني بالطبع يمكنك اختيار أي عمود.

3- لاحظ مرة أخرى أننا اخترنا الرقم 2 كمؤشر مناشب للوقت اللازم لوصول الطلبية الجديدة، لاحظ أن الرقم الذي يليه في نفس العمود يبلغ 94 وهو غير مناسب تماماً.

4- لا يوجد أوامر تم إصدارها في اليوم الرابع، بسبب أن يوجد أمر صدر اليوم السابق ولم يصب بعد.

5- يشير الرقم 10 إلى حجم الطلبية الذي تم إصداره في نهاية اليوم السادس ولم تحدث إن كانت هناك مبيعات مفقودة (ضائعة) خلال اليومين اللازمين لوصول الطلبية الجديدة.

ويوضح الجدول رقم [11-9] بعض النتائج لمتخذ القرار منها:

متوسط الرصيد آخر المدة من المخزون = $\frac{\text{41 وحدة}}{\text{10 أيام}}$

= 4.1 وحدة/يوم.

متوسط المبيعات المفقودة (الضائعة) = $\frac{\text{2 وحدة مفقودة}}{\text{10 أيام}}$

= 0.2 وحدة /يوم.

متوسط عدد أوامر الشراء = $\frac{\text{3 أوامر}}{\text{10 أيام}}$ = 0.3 أمر/يوم.

تساعد النتائج السابقة في دراسة تكاليف المخزون وسياسة المحاكاة التي تم اتباعها. ولتوضيح ذلك افترض أن تكلفة إصدار أمر الشراء تبلغ 10 جنيهات، وأن تكلفة المبيعات الضائعة تبلغ 8 جنيه لكل وحدة مثل هذه المعلومات سوف تساعد متخذ القرار في حساب تكلفة المخزون اليومية. دعنا الآن نوضح ذلك:

تكلفة الأمر اليومي	=	**تكلفة إصدار الأمر**	×	**عدد الأوامر الصادرة في اليوم الواحد**	= 10 × 0.3 = 3 جنيه
تكلفة الاحتفاظ اليومي بالمخزون	=	**تكلفة الاحتفاظ للوحدة الواحدة**	×	**متوسط رصيد آخر المدى من المخزون**	= 50 قرشاً للوحدة × 4.1 = 2.05 جنيه
تكلفة نفاذ المخزون اليومية	=	**عدد وحدات المبيعات المفقودة**	×	**تكلفة المبيعات المفقودة للوحدة**	= 0.2 × 8 = 1.6 جنيه

تكلفة المخزون اليومية	=	**تكلفة الأمر اليومي**	+	**تكلفة الاحتفاظ اليومية بالمخزون**	+	**تكلفة نفاذ المخزون**	= 3 + 2.05 + 1.6 = 6.65 جنيه.

وأخيراً في نهاية هذا لتحليل دعنا نثير تساؤلاً هاماً: هل تكفي محاولة واحدة للمحاكاة لاستخلاص نتائج دقيقة عن سياسة المخزونوتكلفتها؟ الإجابة في الواقع بالنفي، بل يجب أن تتم مئات المحاولات أو آلاف المحاولات. فالقاعدة عموماً تشير إلى أنه كلما زادت عدد المحاولات اقتربنا أكثر من التقديرات الدقيقة للسياسة أو المشكلة محل الدراسة. ويظهر هنا بوضوح دور الحاسبات الإلكترونية في إجراء عدد كبير جداً من المحاولات في وقت قصير للغاية، ومن البرامج المعدة خصيصاً لهذا الغرض برنامج MAPII, Excel, SIMFACTORY,

SLAM II. يضاف إلى ذلك أنه يمكن استخدام أوراق العمل الإلكترونية مثل إكسل ولوتس 1، 2، 3 لتطوير محاكية سريعة وسهلة.

استخدام الحاسب الآلي في المحاكاة

لاشك أن استخدام الحاسب الآلي في عمليات المحاكاة يساعد في القيام بالإجراءات المتكررة آلاف المرات في ثواني معدودة، كما يساعد أيضاً في توليد الأرقام العشوائية. ومن ثم يسهل كثيراً في إنجاز عمليات المحاكاة لمتخذ القرار.

وفي هذا الصدد يوجد نوعان من لغات الحاسب الآلي التي يمكن استخدامها في إجراءات المحاكاة. النوع الأول والذي يطلق عليه لغات FORTRAN، لغة PASCAL، PLII، BASIC، COBOL.

أما النوع الثاني فيطلق عليه اللغات ذات الأغراض Special Programming Language وهي لغات مخصصة أساساً لتصميم برامج المحاكاة ومن بينها لغة GPSS[1]، GASP[2]، DYNAMO[3]، SIMSCRIPT[4].

أخيراً يمكن استخدام أوراق العمل الإلكترونية Spread Sheets مثل لوتس 1، 2، 3 وإكسل Excel لتطوير برامج سهلى الاستخدام للمحاكاة حيث تتضمن هذه الأوراق دوال كثيرة منها دوال توليد الأرقام العشوائية مثل دالة Rand.

---

1 : GPSS = General Purpose System Simulator وهو من إنتاج شركة IBM
2 : GAPS = General Activity Simulator Package وهو من إنتاج شركة IBM
3 : DYNAMO تم تطويره بمعهد MIT بالولايات المتحدة
4 : SIMSCRIPT تم تطويره من خلال شركة

Program Simulation

***** INPUT DATA ENTERED *****

Inventory Simulation : 20.00
Holding cost per unit : 10.00
Shorting cost per unit : 40.00
Ordering cost per unit : 256
Total Annual working days : 100
Minimum order quantity : 150
Maximum order quantity : 75
Minimum reorder point : 80
Maximum reorder point : 20

Demand Distribution

Demand	Probability
55	0.05
66	0.95

Lead Time Distribution

Lead Time	Probability
30.00	0.80
50.00	0.20

Minimum annual total Inventory Cost: 821760.0
Order quantity: 135
Reorder point: 79

الفصل الثاني عشر

نظرية صفوف الانتظار

الفصل الثاني عشر

نظرية صفوف الانتظار

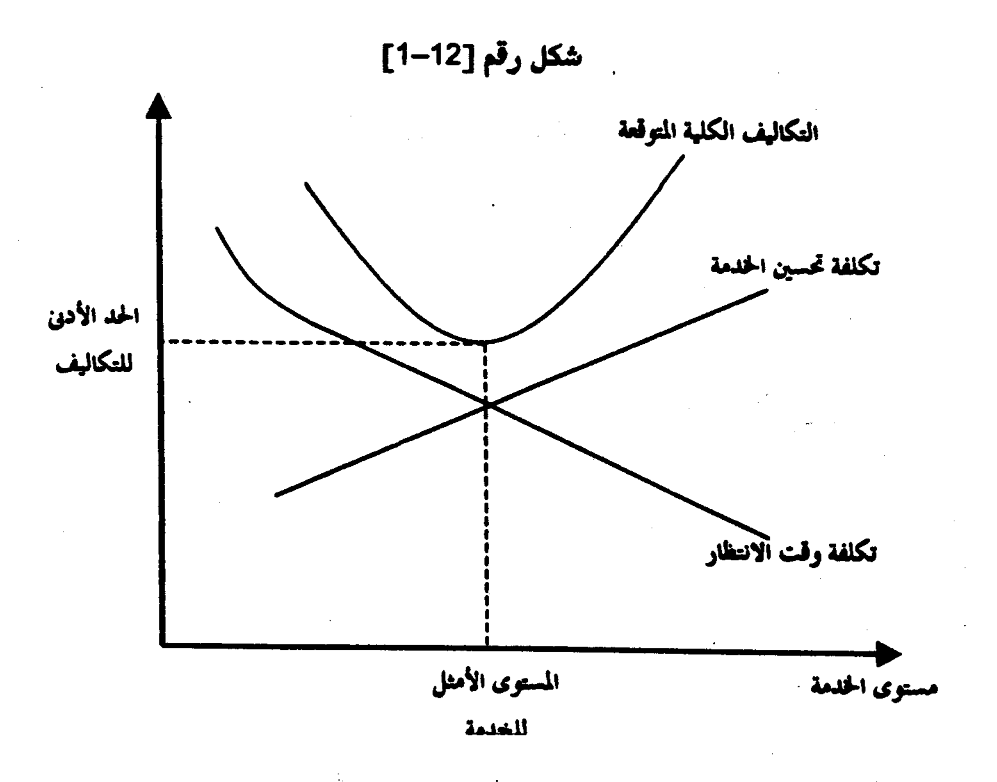
مقدمة

يطلق على المعرفة الخاصة بخطوط الانتظار Waiting Lines اسم نظرية الصفوف Queuing Theory والتي تمثل أحد الأدوات الهامة في تخطيط ومراقبة العمليات الإنتاجية والمستخدمة على نطاق واسع في هذا المجال ومن الأمثلة على المشكلات التي يحتاج فيها متخذ القرار إلى الاستعانة بنظرية الصفوف مشكلة انتظار السيارات للإصلاح والصيانة في محطة الخدمة، مشكلة المكتب الذي ينتظر دورها في الطباعة في المطبعة.. إلخ، مشكلة الآلات التي تنتظر دورها في الصيانة الوقائية أو الإجراءات في مصنع ما.

ويمكن الاستفادة من نظرية صفوف الانتظار في كل من التصنيع وتقديم الخدمات، ويساعد تحليل خطوط الانتظار من خلال تحليل طول خط الإنتاج، ومتوسط وقت الانتظار .. إلى تحسين الأداء والخدمات المقدمة وتدنية التكاليف أيضاً.

وفي ظل دراسة خطوط الانتظار، يجب على مدير الإنتاج والعمليات أن يدرك العلاقة بين التكاليف المرتبطة بتقديم خدمة جيدة للعملاء وتكلفة انتظار العميل لتلقي هذه الخدمة، وعليه ان يدير هذه العلاقة جيداً، وأن يقايض بين هذين النوعين من التكاليف بالشكل الذي يؤدي إلى تخفيض التكاليف الكلية. حيث من المتوقع ــ كما يوضح ذلك الشكل رقم [12-1]. زيادة التكاليف المرتبطة بتقديم الخدمة بتحسين مستوى الخدمة المقدمة، في حين من المتوقع أن تنخفض وقت انتظار العميل

شكل رقم [12-1]



ويهدف مدير الإنتاج والعمليات في الواقع إلى أن يكون خط الانتظار أقصر ما يمكن، وبالشكل الذي يضمن رضاء العميل، ليس هذا فحسب، بل أيضاً يضمن عدم مغادرة العميل دون تلقي الخدمة بل يضمن أخيراً عدم تفكير العميل في أن يتلقى الخدمة هذه المرة وألا يعود ثانية.

خصائص نظام خطوط الانتظار

يتطلب عرض خصائص نظام خطوط الانتظار ـ التركيز على ثلاثة أجزاء أو مكونات لخط الانتظار وهي:

- مدخلات النظام او ما يطلق عليه عملية "الوصول" Arrival.
- خط الانتظار، أو ما يطلق عليه تنظيم الصفوف Queue Discipline.
- تسهيلات الخدمة.

حيث ينبغي في البداية عرض الخصائص المحـــددة لكـل مكـون مـن المكونات الثلاثة السابقة، قبل تطوير أي نماذج رياضية لخطوط الانتظار.

1- خصائص عملية الوصول

يقصد بالوصول – ورود الوحدات (العملاء) التي تطلب الخدمة إلى مقدم الخدمة، وفي هذا الشأن يوجد ثلاثة خصائص لعملية الـــورود وهــي: حجـم المجتمع الذي يطلب الخدمة، شكل أو نمط وصول العملاء (طـــالبي الخدمـــة) وأخيراً سلوك طالبي الخدمة للحصول على الخدمة او الخدمات.

1-1 حجم المجتمع الذي يطلب الخدمة

إما أن يكون المجتمع الذي يطلب الخدمة غير محدود (لا نــهائي Infinite) أو محدود Finite، وعندما يكون عدد العملاء (طالبي الخدمة) في لحظة معينـة يمثل جزءاً صغيراً من طالبي الحقيقة. فإنه يطلق على حجم المجتمع في هـــذه الحالة بأنه مجتمع غير محدود. مثال ذلك يمثل عدد السيارات في لحظة معينة والتي تتطلب التزود بالبنزين في محطة على الطريق السريع جزءاً من مجتمع غير محدود. وتتبنى معظم نماذج الصفوف على هـــذه الخاصيـــة (خاصيـــة المجتمع غير المحدود). ومن الأمثلة على المجتمع المحـــدود مكتـــب لكتابــه الرسائل العلمية به ثلاث أجهزة كمبيوتر، فعندما تحدث بعض الأعطال لجـهاز من هذه الأجهزة، فإن رجل الصيانة (مقدم الخدمة) أو مندوب الصيانة ينظـــر إلى مكتب على أنه مجتمع محدود.

2-1 نمط وصول العملاء

قد يكون وصول العملاء (طالبي الخدمة) إلى محطة الخدمة وفقاً لجـــدول زمني معروفة ومحدد لو أن يتم وصول العملاء ويتم عشوائي. ويعتبر وصـول العملاء (متلقي الخدمة) عشوائيا. عندما يكون كل عميل مستقل عن العمـــلاء الأخرين. كما لا يمكن التنبؤ بحدوث عملية الوصول لمتلقي الخدمة. وبترتيبـــا

على ذلك فإن عدد العملاء (متلقي الخدمة) لكل وحدة من الزمن يمكن تقديرها، باستخدام خصائص توزيع "بواسون" ومن ثم فإن معدل الوصول (مثل 3 عملاء كل ساعة، او 5 سيارات كل 30 دقيقة) يمكن تحديده باستخدام توزيع "بواسون" من خلال المعادلة الآتية:

$$ح(ر) = \frac{ط^{-و} و^{ر}}{ر!} \quad .... (1)$$

حيث أن

ر = 0، 1، 2، 3، 4 ....

ح(ر) = احتمال الوصول لعدد من العملاء.

ر= عدد الوحدات التي تصل لكل فترة.

و = متوسط معدل الوصول.

ط = أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوي 02.7183

ويمكن استخدام جدول توزيع بواسون في ملحق هذا الفصل للقيام بالعمليات الحسابية للمعادلة السابقة، ويوضح الشكل رقم [12-2] توزيع "بواسون" عندما يكون متوسط معدل الوصول ويبلغ 2، وأيضاً عندما يبلغ 4، ويوضح الشكل الأول (عندما يبلغ معدل الوصول 2) أن احتمال أن لا تصل أي وحدة يبلغ 13% بينما احتمال ان تصل وحدة واحدة فيبلغ 27% كما أن احتمال وصول وحدتين فيبلغ أيضاً 27% اما احتمال وصول 3 وحدات فيبلغ 18%، أخيراً فإن احتمال وصول 4 وحدات يبلغ 9% .. وهكذا. أما فرصة وصول 9 عملاء أو أكثر يساوي صفراً، وأخيراً يجب التنبيه إلى أن عملية الوصول لا تتبع في كل الأحوال توزيع "بواسون" ويجب إجراء تقريب بشكل معين في بعض الحالات حتى يمكن استخدام توزيع "بواسون".

1-3 سلوك طالبي (متلقو الخدمة)

تفترض معظم نماذج الصفوف أن متلقي (طالب) الخدمة عندما يصل سوف ينتظر (Patient Customer) حتى يتلقى الخدمة ولن يقوم بتغيير محطة الخدمة أو الصف الذي وصل إليه. ولسوء الحظ فإن الواقع يشير إلى كثير من الحالات التي يرفض فيه العميل (متلقي) الخدمة الانضمام لصف الانتار، ذلك لأن طول الصف لن يحقق له احتياجاته ورغباته من تلقي الخدمة بشكل أو آخر في وقت معين، ويطلق على العميل في هذه الحالة "العميل الذي يتوقف فجأة عن إتمام تلقي الخدمة Balk Customer وفي بعض الحالات الأخرى قد يرتد العميل ويغادر الصف قبل تلقي الخدمة ويطلق على العميل في هذه الحالة Reneging Customer.

2- خصائص خط الانتظار

يمثل خط الانتظار الجزء الثاني في نظام الصفوف ويمثل طول الخط الخاصية الأولى فقد يكون طول الخط محدود او غير محدود، ويكون خط الانتظار محدود عندما لا يكون في الإمكان (نظراً لوجود لوائح، أو محددات مادية) جعل خط الانتظار غير محدود. مثال ذلك صالون الحلاقة، أو كوافير السيدات (نظراً لوجود محددات مادية متمثلة في عدد المقاعد المتاحة). وسوف نناقش فقط حالة الصفوف غير المحدودة في هذا الفصل مثل حالة السيارات التي تتلقى خدمة التزود بالبنزين من أحد محطات الخدمة على الطريق السريع.

أما الخاصية الثانية لخط الانتظار فتتمثل في تنظيم الخط، او كيفية تقديم الخدمة للعملاء بالصف. ومعظم نماذج خطوط الانتظار تقوم على أساس قاعدة العميل الذي يرد أولاً يخدم أولاً FIFO *.

3- خصائص تسهيلات الخدمة

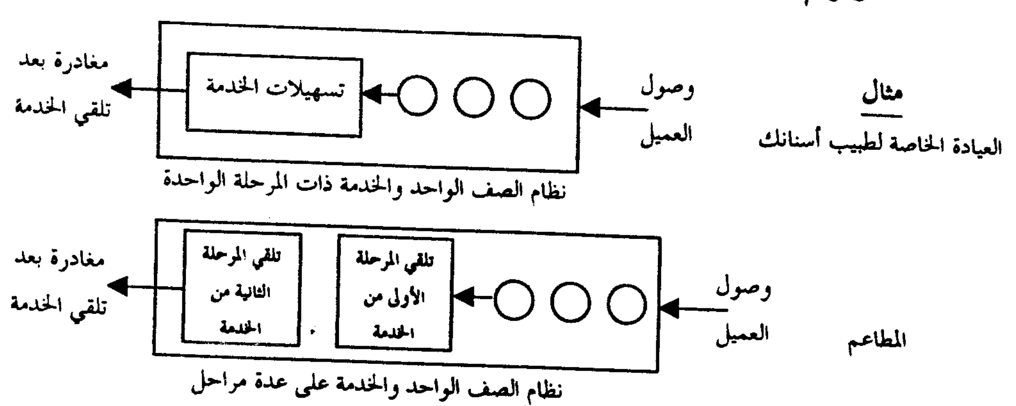
* FIFO = First IN First Served = First In First Out.

تمثل خصائص تسهيلات الخدمة المكون الثالث في نظام الصفوف، وفـــي هذا الشأن سوف نناقش خاصيتين كل درجة عالية من الأهمية، وهما ترتيب أو هيئة نظام الخدمة Configuration. وطبيعة أو نمط وقت الخدمة.

3-1 هيكل نظام الخدمة

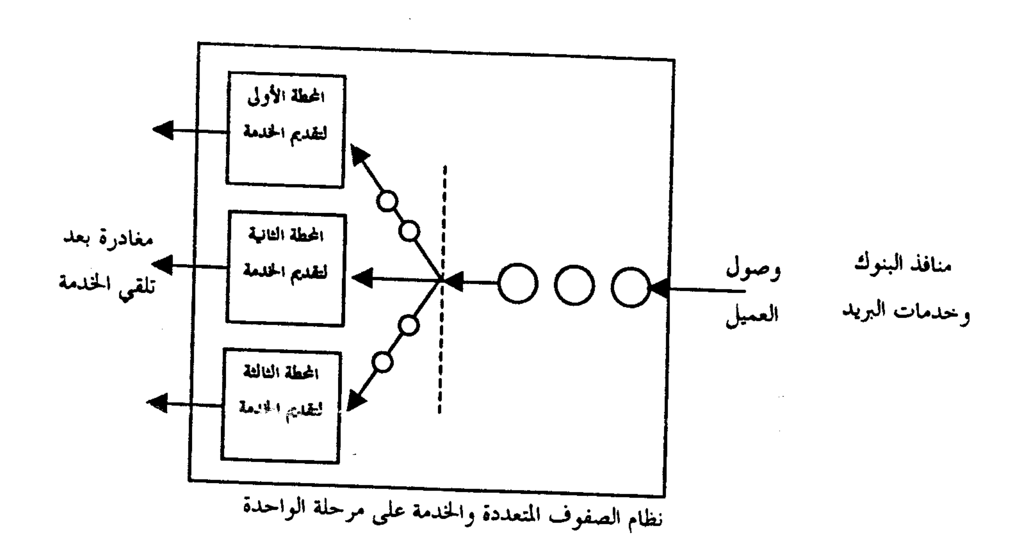
يتم تصنيف أنظمة الخدمة عادة وفقاً لعدد القنوات التي تقدم الخدمة (عــدد محطات الخدمة) وعدد المراحل (عدد مرات التوقف) وفي هذا الشأن يمكـــن التفريق بين أربعة أشكال لخط الانتظار كما يوضح ذلك الشكل رقم [3-12]

شكل رقم [12-3] الهياكل الأساسية لنظام الصفوف

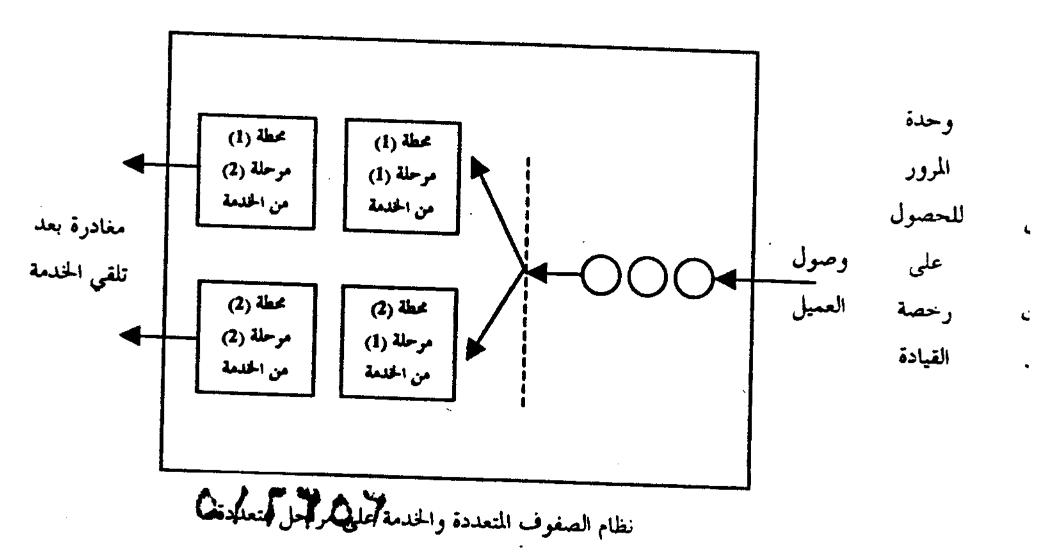


نظام الصف الواحد والخدمة ذات المرحلة الواحدة

نظام الصف الواحد والخدمة على عدة مراحل



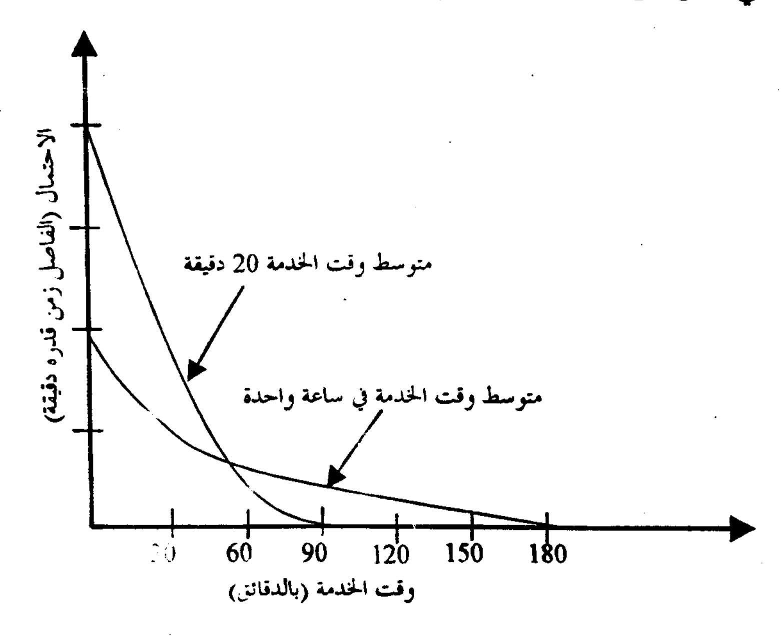
نظام الصفوف المتعددة والخدمة على مرحلة الواحدة



نظام الصفوف المتعددة والخدمة على مراحل متعددة

2-3 نمط وقت الحياة

يشبه نمط الخدمة نمط الوصول فكلاهما إما أن يكون محدد او عشـــوائي، فإذا كان وقت الخدمة ثابت، فمعنى ذلك أن كل عميل (متلقي الخدمة) ســـوف يحصل عليها في وقت محدد (مثال ذلك الغسيل الآلي للسيارة). وفي حـــالات أخرى يكون وقت الخدمة عشوائي ولذلك يمكن استخدام التوزيـــع الاحتمـــالي الأسي السالب Negative Exponential Probability Distribution خاصة عندما يكون متوسط معدل الوصول يتبع توزيـــع " بواســـون". ويوضـــح الشـــكل رقم [12-4] أن نمط وقت الخدمة يتبع التوزيع الأسي. حيث يظهر أن احتمال أن يكون وقت أداء الخدمة طويل جداً سوف يكون منخفضاً للغاية. فمثـــلاً إذا كان متوسط وقت الخدمة هو 20 دقيقة، فنادراً ما يحتاج العميل إلى وقت يبلـــغ 90 دقيقة لأداء الخدمة. ومن المؤكد أن يبلغ احتمال الوقت المنقضي لأداء هذه الخدمة في أكثر من 180 دقيقة صفراً.



قياس اداء صف الانتظار

تساعد نماذج صفوف الانتظار المديرين في اتخاذ القرارات التي توائم بين تكلفة المرغوب فيها لأداء الخدمة وتكلفة الانتظار على الخط ويوجد العديد من مقاييس الأداء لخطوط الانتظار من بينها:

1- متوسط وقت العميل متلقي الخدمة، او متوسط الوقت المنقضي لكل عميل في الخط.
2- متوسط طول صف الانتظار.
3- متوسط الوقت المنقضي لكل عميل (متلقي الخدمة) في النظام والذي يتكون من متوسط وقت الخدمة بالإضافة إلى متوسط وقت الانتظار.
4- متوسط عدد العملاء (متلقو الخدمة) في النظام.
5- احتمال تعطل التسهيلات أو الخدمة.
6- معدل الاستخدام للنظام.
7- احتمال وجود عدد محدد من العملاء (متلقي الخدمة) في النظام.

النماذج المختلفة لصفوف الانتظار

يوجد العديد من نماذج صفوف الانتظار المستخدمة في مجال إدارة العمليات وسوف نقتصر في هذا الفصل على أربعة نماذج أساسية وهي أكثر النماذج وبعض خصائصه ـ وسوف نعرض لبعض نماذج صفوف الانتظار الأكثر تعقيداً في ملحق هذا الفصل ـ ويلاحظ أن النماذج الأربعة الموضحة في جدول رقم [1] تتصف بشكل عام بالخصائص الآتية:

1- عملية وصول العملاء لتلقي الخدمة تتبع توزيع بواسون.
2- تقديم الخدمة للعملاء يتم وفقاً لقاعدة الوارد أولاً يخدم أولاً.
3- تتم الخدمة على مرحبة واحدة.

جدول [12–1] وصف لبعض نماذج الصفوف

النموذج	اسم النموذج	مثال	عدد الصفوف	عدد المراحل	نمط الوصول	نمط وقت الخدمة	حجم المجتمع	
أ	النموذج البسيط (M/M1)	محصل النقدية في متجر التجزئة	صف واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسي	غير محدود	الوارد اولاً يخدم اولاً
ب	نموذج مراكز الخدمة المتعددة (M/M/S)	موظف الحجز في شركة طيران	عدة صفوف	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسي	غير محدود	الوارد اولاً يخدم اولاً
جـ	نموذج مركز الخدمة الثابت (المحدود) (M/D/I)	محطة الغسيل الآلي للسيارات	صف واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	ثابت	غير محدود	الوارد اولاً يخدم اولاً
د	نموذج المجتمع المحدود	محل به أثناء عشر آلة من الممكن أن تتعطل إحداها	صف واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسي	محدود	الوارد اولاً يخدم اولاً

يضاف إلى ذلك أن نظام أداء الخدمة في النماذج الأربعة تعمل في ظل استقرار واستمرارية الظروف، وهو ما يعني أن عملية الوصول ومعدل الخدمة يظلان مستقران أثناء التحليل.

النموذج الأول: نموذج الصف الواحد

Single – Channel Queuing Model SCQM

في ظل هذا النوع، يتم وصول العملاء (متلقي الخدمة) في صف واحد حيث يتلقى هؤلاء العملاء الخدمة من محطة خدمة واحدة (كما هو موضح في شكل 3) ويفترض توافر بعض الشروط في هذا النظام:

1- يتم خدمة العملاء وفقاً لقاعدة الوارد أولاً يخدم أولاً، كما يفترض أيضاً أن كل عميل يصل سوف ينتظر حتى يتلقى الخدمة بغض النظر عن طول الخط أو الصف.
2- عملية وصول العملاء (متلقوا الخدمة) مستقلة بعضها عن بعض، ولكن متوسط معدل الوصول ثابت لا يتغير عبر الوقت.
3- يتم وصف عملية الوصول باستخدام توزيع بواسون وكذلك فإن الوحدات التي تتلقى الخدمة تأتي من مجتمع غير محدود أو كبير للغاية.
4- يختلف وقت أداء الخدمة من عميل لآخر، غير أن متوسط معدل الخدمة للعملاء معروف ومحدد.
5- وقت الخدمة يتبع التوزيع الإحتمالي الأسي السالب.
6- معدل الخدمة اسرع من معدل الوصول.

ويوضح الجدول رقم [12-2] المعادلات الخاصة بهذا النموذج

جدول [12-2] المؤشرات الخاصة لانموذج الأول لصفوف الانتظار

و- متوسط عدد الوحدات (متلقي الخدمة) التي تصل لكل فترة

خ- متوسط عدد الوحدات التي يتم خدمتها لكل فترة.

ل- متوسط عدد الوحدات (العملاء) في النظام

$$= \frac{\text{و}}{\text{خ} - \text{و}}$$

س- متوسط الوقت المنقضي لكل وحدة في النظام (وقت الانتظار + وقت الخدمة)

$$= \frac{1}{\text{خ} - \text{و}}$$

ع- متوسط عدد الوحدات في الصف.

$$= \frac{\text{و}^2}{\text{خ}(\text{خ} - \text{و})}$$

ط- متوسط وقت الانتظار المنقضي لكل وحدة في الصف.

$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\text{و}}{\text{خ}(\text{خ} - \text{و})}$$

ك- معدل استخدام النظام

ح- احتمال عدم وجود وحدات (عملاء) في النظام (احتمال توقف النظام)

$$= 1 - \frac{\text{و}}{\text{خ}} = 1 - \text{ك}$$

ح ن > ي = احتمال أن تزيد الوحدات في النظام عند عدد معين K حيث أن ن تشير إلى عدد الوحدات في النظام

$$= \left(\frac{\text{و}}{\text{خ}}\right)^{\text{ي}+1}$$

مثال (1):

تقدم محلات (البيتزا في يد لجميع) نوعاً جديداً من البيتزا المحشوة بالجمبري. وتستطيع تقديم 3 بيتزات كل ساعة (بيتزا واحدة كل 20 دقيقة) ووفقاً للتوزيع الأسي السالب فقد قدر متوسط عدد العملاء طالبي الخدمة

(شراء البيتزا) باثنين في ساعة، ويتبع العملاء توزيع بواسون في حصولهم للمحل، كما أن المحل يتبع قاعدة العميل الذي يأتي أولاً يخدم أولاً.

وأخيراً فإن العملاء يفترض أنهم يأتون من مجتمع لا نهائي أو كبير للغاية من خلال المعلومات السابقة المطلوب تحديد الخصائص التشغيلية لخط الخدمة في محلات (البيتزا في يد الجميع) بفرض أن كل عميل سوف يطلب بيتزا واحدة.

- الحل -

و= متوسط عدد الوحدات التي تصل في الساعة(الفترة) = 2

خ= متوسط عدد الوحدات (العملاء) الذين يمكن خدمتهم في الساعة (الفترة)=3

ل= متوسط عدد العملاء (الوحدات) في النظام = $\frac{و}{خ - و} = \frac{2}{3-2} = 2$ عميل

س= متوسط الوقت المنقضي لكل وحدة في النظام = $\frac{1}{خ - و} = \frac{1}{3-2} = 1$ ساعة

ع= متوسط عدد الوحدات في الصف = $\frac{و^2}{خ(خ - و)} = \frac{(2)^2}{3(3-2)} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ وحدة

ط= متوسط وقت الانتظار المنقضي لكل وحدة = $\frac{و}{خ(خ - و)}$

$= \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$ ساعة

ك= معدل استخدام النظام = $\frac{و}{خ} = \frac{2}{3}$

(أي أن 66.6% من وقت العمل يكون النظام مشغول)

ح= احتمال عدم وجود وحدات في النظام (احتمال توقف النظام)

$= 1 - \frac{و}{خ} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(أي أن هناك احتمال 33% أن لا يوجد عميل في المحل)

$ح_{ن} > ي$ احتمال أن تزيد الوحدات في النظام عند عدد معين ي يمكن تحديده كما يلي

$ح_{ن} > ي = (\frac{2}{3})^{ي+1}$

ي	
صفر	$(\frac{2}{3})\ 0 + 1 - 0.667$
1	$(\frac{2}{3})\ 1 + 1 - 0.444$
2	$(\frac{2}{3})\ 2 + 1 - 0.296$
3	$(\frac{2}{3})\ 3 + 1 - 0.198$
	⋮
7	$(\frac{2}{3})\ 7 + 1 - 0.039$

يشير ذلك إلى أن احتمال أن يوجد بالمحل أكثر من 3 عملاء يبلغ %83

استخدام برنامج Manager في حل المثال السابق

Average Service Rate: 3
Average Customer Arrival rate: 2
***** PROGRAM OUTPUT *****

Numbers of Customers	Probability
0	0.333
1	0.222
2	0.148
3	0.099
4	0.066
5	0.044

Mean number of Customer in the System	: 2.00
Mean number of Customer in the queue	: 1.33
Mean time in the System	: 1.00
Mean waiting time	: 0.67
Traffic intensity ratio	: 0.67

تحليل الآثار الاقتصادية لخط الانتظار

بعد تحديد خصائص التشغيل للنظام يكون من المهم تحليل آثارها الاقتصادية، إذ من الممكن استخدام الخصائص السابقة في التنبؤ بالأزمنة المتوقعة، وطول الصفوف، والوقت العاطل، وهكذا. وإن كان يصعب تحديد القرارات المثالية وعوامل التكاليف الواجب أخذها في الإعتبار. وكما ذكرنا سلفاً، فإن حل مشكلة الصفوف يتطلب من الإدارة عمل مقايذة بين الزيادة في التكاليف المترتبة على تقديم أفضل خدمة، والانخفاض في تكاليف الانتظار الناجمة عن إمداد العميل بهذه الخدمة.

دعنا نوضح ذلك افترض في المثال السابق أن محلات (البيتزا في يد الجميع) استطاعت تقدير تكلفة وقت الانتظار للعميل من خلال دراسة درجة عدم الرضا، والشهرة التي يمكن فقدها، وقدرت ذلك بـ 10 جنيه لكل ساعة انتظار في الصف، في حين ان متوسط الوقت الذي يقضيه العميل يبلغ $\frac{2}{3}$ ساعة، وانه تقريباً يوجد 16 عميل يتم خدمتهم في اليوم (يتم خدمة 2 عميل كل ساعة، واليوم يتكون من 8 ساعات)

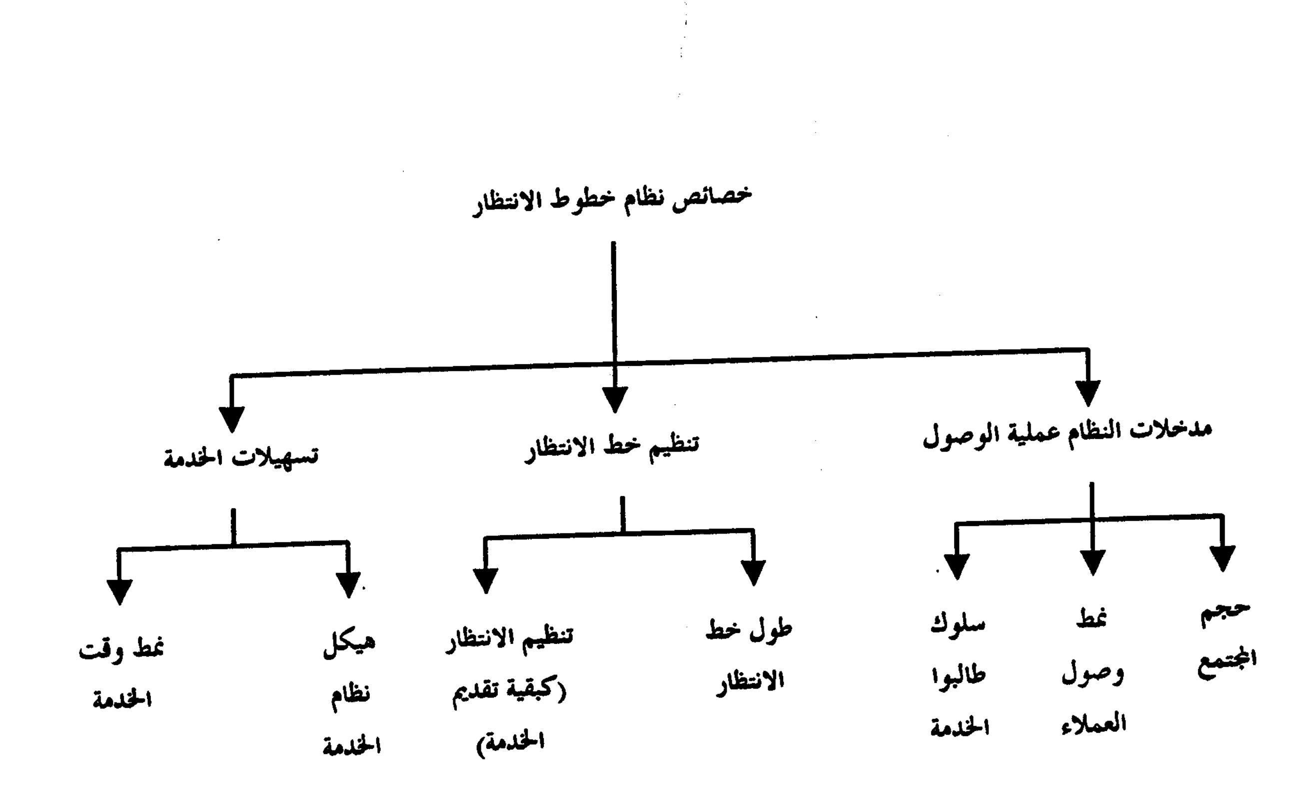
ومن ثم فإن عدد الساعات التي قضيها العملاء في الصف كل يوم هي:

عدد الساعات التي يقضيها العملاء في الصف = $\frac{2}{3}$ (16)

= $10\frac{2}{3}$ ساعة

ومن ثم فإن تكلفة الانتظار للعملاء = $10\frac{2}{3} \times 10 = 107$ جنيه في اليوم

وإذا ما أخذ في الاعتبار التكلفة التي تحملتها محلات (البيتزا في يد الجميع) والمتمثلة في مرتب (سالي) والتي تقوم بإعداد الخلطة السرية للبيتزا، والبالغ 7 جنيه كل ساعة أو 56 جنيه كل يوم (7×8)، فإن التكلفة الكلية المتوقعة في اليوم تبلغ 163 جنيه (56 + 107 جنيه).


خصائص نظام خطوط الانتظار
مدخلات النظام عملية الوصول
تنظيم خط الانتظار
تسهيلات الخدمة
حجم المجتمع
نمط وصول العملاء
سلوك طالبوا الخدمة
طول خط الانتظار
تنظيم الانتظار (كبقية تقديم الخدمة)
هيكل نظام الخدمة
نمط وقت الخدمة

النموذج الثاني: نموذج مراكز الخدمة المتعددة

Multiple Channel Queuing Model MCQM

في ظل هذا النظام يوجد أكثر من مركز خدمة أو محطة لخدمة العمـــلاء حيث يقف العملاء في صف واحد، ثم يتجه العميل إلى مركز الخدمة المتــاح لتلقي الخدمة وحيث تتم الخدمة على مرحلة واحدة. مثل هذا النظام يوجد فـــي العديد من البنوك اليوم.

وسوف نفترض أن نموذج مراكز الخدمة المتعددة الذي نعرض لـــه هنـــا يتبع توزيع "بواسون" كما أن وقت الخدمة تتبع التوزيع الأسى، كما أن العميـل الذي يأتي أولاً سوف يتم خدمته أولاً، وأن معدل الخدمة واحد لجميع العملاء، بالإضافة إلى الافتراضات الأخرى التي ذكرناها في النموذج الأول، وســـوف نوضح فيما يلي المعادلات التي تحدد خصائص التشغيل لهذا النظام من خـلال المثال الآتي:

مثال (2):

افترض في المثال السابق الخاص (بمحلات البيتزا في يـــد الجميـــع) إن إدارة المحل قررت فتح منفذ آخر في نفس المكان لبيع البيتزا، ومن ثم فـــإن العملاء والذين يصلون بمعدل 2 عميل كل ساعة، سوف ينتظرون في صـــف واحد حتى يصبح أياً من منفذي البيع متاحاً، فإذا كان عدد العملاء الذين يمكن خدمتهم في الساعة لكل منفذ يبلغ 3 عملاء.

دعنا نقارن الآن بين خصائص التشغيل لهذا النظام والنظام الأول الـــذي عرضنا له فيما سبق، ولنبدأ بعرض المعادلات الخاصة بهذا النموذج.

م= عدد مراكز الخدمة.

و= متوسط معدل الوصول.

خ= متوسط معدل الخدمة لكل مركز أو محطة خدمة.

ح= إحتمال عدم وجود عملاء في النظام.

$$= \frac{1}{\left[\underset{\text{ن}=0}{\overset{\text{م}-1}{\text{مجـ}}} \frac{1}{\text{ن}!} \left(\frac{\text{و}}{\text{خ}} \right)^{\text{ن}} \right] + \frac{1}{\text{م}!} \left(\frac{\text{و}}{\text{خ}} \right) \frac{\text{م خ}}{\text{م خ} - \text{و}}}$$

وبشرط أن

$\text{م خ} > \text{و}$

ويشير هذا الشرط إلى أن عدد العملاء الذين يتم خدمتهم يكون أكبر من عدد العملاء الذيـــن يصلون للنظام لكل فترة زمنية.

لاحظ أن ن تشير إلى عدد المراكز التي يمكن أن تكون متاحة في لحظة معينة حيــث يمكـــن إلا يوجد أي مركز متاح في لحظة معينة.

وعند ذلك ن= صفر

ل = متوسط عدد العملاء في النظام.

$$= \frac{\text{و خ} \left(\text{و} / \text{خ} \right)^{\text{م}}}{\left(\text{م} - 1 \right)! \left(\text{م خ} - \text{و} \right)^2} \times \text{ح} + \frac{\text{و}}{\text{خ}}$$

س = متوسط وقت الانتظار الذي تقضيه الوحدة في النظام

$$= \frac{\text{خ} \left(\text{و} / \text{خ} \right)^{\text{م}}}{\left(\text{م} - 1 \right)! \left(\text{م خ} - \text{و} \right)^2} \times \text{ح} + \frac{1}{\text{خ}}$$

$$= \frac{\text{ل}}{\text{و}}$$

ع = متوسط عدد الوحدات (العملاء) في الصف

$$= \text{ل} - \frac{\text{و}}{\text{خ}}$$

ط = متوسط الوقت الذي تقضيه الوحدة (العميل) في الصف إنتظاراً لتلقي الخدمة.

$$= \text{س} - \frac{1}{\text{خ}} = \frac{\text{ع}}{\text{و}}$$

وبالرجوع إلى المثال السابق، يمكن تحديد خصائص التشغيل لهذا النظـــام كما يلي:

م= 2 محطة أو مركز خدمة.

و= 2 عدد العملاء طالبي الخدمة كل ساعة.

خ = 3 معدل الخدمة.

(1) احتمال عدم وجود عملاء (وحدات) في النظام:

$$\frac{1}{\frac{(3)2}{م(3)-2}\,2\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{م!} + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{ن}\frac{1}{ن!}\sum_{ن=0}^{2-1}\right]} = ح$$

$$1 = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{6}{3-6}\right)\left(\frac{4}{9}\right)\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} =$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+صفر}{2} = ح \therefore$$

(2) متوسط عدد العملاء في النظام

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{2(3/2)(3)(2)}{^{2}[2-(3)2]1}$$

$$0.75 = \frac{3}{4} = \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3/8}{16} =$$

(3) متوسط الوقت المنقضي لكل وحدة (عميل) في النظام

(4) $ساعة\ \frac{3}{8} = \frac{4/3}{2} = \frac{ل}{و} = س$

= 22.5 دقيقة.

(5) متوسط عدد الوحدات (العملاء) في الصف

$ع = ل - \frac{و}{خ} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

= 0.083

(6) متوسط وقت الانتظار لكل وحدة (عميل) في النظام.

$ط = \frac{ع}{و} = \frac{0.083}{2} = 0.415$ ساعة

= 2.5 دقيقة.

حل المشكلة السابقة باستخدام برنامج Manager

Program: queuing models

***** INPUT DATA ENTERED *****

M/M/C TYPE

Average service rate: 3

Average customer arrival rate: 2

Number of servers :2

***** PROGRAM OUTPUT *****

Number of customers	probability
0	0.500
1	0.333
2	0.111
3	0.037
4	0.012
5	0.004

Mean number of customers in the system	:	0.75
Mean number of customers in the queue	:	0.08
Mean time in the system	:	0.71
Mean waiting time	:	0.04
Traffic intensity ratio	:	0.33

والآن، ماذا يمكن أن نستنتج من مقارنة النتائج الخاصة بـــالنموذج الأول (ذو مركز الخدمة الواحد) والنموذج الثاني (ذو مركزين للخدمة)

	النموذج الأول	النموذج الثاني
ح	0.33	0.5
ل	2 عميل	0.75 عميل
س	60 دقيقة	22.5 دقيقة
ع	1.33 عميل	0.083 عميل
ط	40 دقيقة	2.5 دقيقة

يشير الجدول السابق إلى نتائج درماتيكية، فقد أدى زيادة وحدات الخدمـــة أو محطات الخدمة إلى انخفاض الوقت الذي يقتضيه العميل من 40 دقيقة إلـــى 2.5 دقيقة.

النموذج الثالث: نموذج الخدمة ذات الوقت الثابت

Constant Service Time Model

تتصف بعض نظم الخدمة بأن وقت أداء الخدمة ثابت، والمثال على ذلـــك محطة الغسيل الآلى للسيارات، وطالما أن قوت أداء الخدمة ثابت، فإن كل من القيم ع،ط،ل،س عادة ما تكون أقل من مثيلتها في النموذج الأول، وفيما يلـــي

سوف نعرض للمعادلات الخاصة بخصائص التشغيل لهذا النموذج كما يوضح ذلك الجدول (12-4).

جدول رقم (12-4) خصائص التشغيل لنموذج الخدمة ذات الوقت الثابت

ع= متوسط عدد الوحدات (العملاء) في الصف

= متوسط طول الصف

$$= \frac{و^2}{2خ(خ - و)}$$

ط= متوسط الوقت الذي تقضيه الوحدة في الصف انتظاراً لتلقي الخدمة.

$$= \frac{و}{2خ(خ - و)}$$

ل= متوسط عدد العملاء في الصف

$$= ع + \frac{و}{خ}$$

س= متوسط الوقت الذي تقضيه الوحدة في النظام.

$$= ط + \frac{1}{خ}$$

مثال (3):

تقوم شركة " التصنيع الحديثة" بإستقبال الشاحنات التي تحمل المواد المختلفة لإعادة تدويرها وتصنيعها، ويبلغ متوسط وقت الشاحنة حتى يتم تفريغها 15 دقيقة، في حين تبلغ تكلفة ساعة الانتظار في الصف 60 جنيه، وكان أمام الشركة آلة تفريغ حديثة، فإذا كان وصول الشاحنات يتبع توزيع بواسون ومعدل الوصول 8 شاحنات كل ساعة، فإذا دخلت آلة التفريغ الحديثة في العمل، فإن تكلفة التفريغ للشاحنة الواحدة سوف يبلغ 3 جنيهات، المطلوب مقارنة المنافع والتكاليف قبل وبعد استخدام آلة التفريغ الحديثة.

■ الحل ■

تكلفة وقت الانتظار الحالي = 15 دقيقة × 60 جنيه للساعة

$= \frac{1}{4} \times 60 = 15$ جنيه لكل شاحنة.

استخدام آلة التفريغ الحديثة:

و = متوسط معدل الوصول = 8 شاحنات في الساعة.

خ = متوسط معدل الخدمة = 12 شاحنة في الساعة.

ط = متوسط وقت الانتظار الذي تقتضيه الشاحنة انتظاراً لتلقي الخدمة.

$= \frac{و}{2خ(خ - و)}$

$= \frac{8}{2(12)(12-8)} = \frac{8}{96} = \frac{1}{12}$ ساعة

إذن متوسط تكلفة الانتظار في الصف

$= \frac{1}{12} \times 60$ جنيه في الساعة = 5 جنيه لكل شاحنة

الوفورات نتيجة استخدام الآلة الحديثة:

= 15 جنيه في الساعة (نظام قديم) – 5 جنيه في الساعة (نظام حديث)

= 10 جنيه.

تكلفة استخدام الآلة الجديدة = 3 جنيه.

الوفر = 10 –3 = 7 جنيه

القرار: يجب استخدام الآلة الحديثة في التفريغ.

النموذج الرابع: نموذج المجتمع المحدود:

عندما يتصف المجتمع الذي سوف يتلقى الخدمة بأنه محدود، فإننا نحتاج إلى نموذج مختلف لمعالجة مشاكل صفوف الإنتظار، ومن الأمثلة على هذا

المجتمع، عملية صيانة المعدات في أحد المصانع، فالمعدات في المصنع تمثل مجتمعاً محدوداً، أما أسباب اختلاف نموذج الصفوف في حالة المجتمع المحدود عن النماذج التي سبق عرضها، فيرجع ذلك إلى علاقة الاعتمادية بين طول الصف ومعدل الوصول، ولتوضيح ذلك، افترض أن المصنع يتكون من خمسة آلات، وكلها تعرضت للأعطال وتنتظر الصيانة، فإن معدل الوصول سوف يصبح في هذه الحالة سفراً ويوضح جدول رقم (12-5) المعادلات الخاصة المعادلات الخاصة بنموذج المجتمع المحدود.

معدل الخدمة س = $\frac{\text{ت}}{\text{ت + ى}}$

متوسط عدد الوحدات المنتظرة ل = ن (1-ف)

متوسط وقت الانتظار و = $\frac{\text{ل(ت + ى)}}{\text{ن − ل}} = \frac{\text{ت(1 − ف)}}{\text{س × ف}}$

متوسط عدد مرات الانتظار جـ = ن × ف (1-س)

متوسط عدد الوحدات التي يتم خدمتها هـ = ف × ن × س

عدد المجتمع ن = جـ + ل + هـ

حيث أن:.

ح = احتمال انتظار الوحدة في الصف.

ف = معامل الكفاءة.

هـ = متوسط عدد الوحدات التي يتم خدمتها.

جـ= عدد الوحدات غير الموجودة في الصف أو في الخدمة.

ل = متوسط عدد الوحدات التي تنتظر الخدمة.

م = عدد المحطات (الوحدات) التي تقدم الخدمة.

ن = عدد الوحدات الفعلية (طالب الخدمة) الفعليين.

ت = متوسط وقت الخدمة.

ى= متوسط الوقت المنقضي بين طلب الخدمة للوحدة.

و = متوسط وقت الانتظار للوحدة في الخط (الصف).

مثال (4):

تشير السجلات الخاصة بشركة " الحاسبات الرقمية" إلى وجود 5 وحدات طباعة ليزر تحتاج إلى صيانة بعد 20 ساعة من عملها تقريباً وأن الأعطال لهذه الوحدات تتبع توزيع "بواسون" ويحتاج فني الصيانة إلى ساعتين تقريباً لإصلاح وحدة الطباعة وتتطلب الساعة تكلفة 120 جنيه، ويحصل الفني على 25 دولار في الساعة، هل تعتقد أن شركة " الحاسبات الرقمية" سوف تحتاج إلى تشغيل فني جديد؟ افترض أن مهندس الصيانة الثاني يمكنه إصلاح وحدة الطباعة في ساعتين.

- الحل -

سوف نلاحظ في البداية أن

ت = متوسط وقت الخدمة = 2 ساعة.

ى = متوسط الوقت المنقضي بين طلب الخدمة للوحدة = 20 ساعة.

وعلى ذلك فإن:

$$\text{س= معدل الخدمة} = \frac{\text{ت}}{\text{ت + ى}} = \frac{2}{2 + 20} = 0.91$$

= 0.90 تقريباً.

في حالة وجود مهندس (فني) صيانة واحد

أي أن م =1، ح يقابل (س=0.90)= 0.350

وبالكشف في جداول الصفوف المحدودة أمام ح= 0.350 م=1 نجد أن ف = 0.960.

في حالة وجود اثنين من فنيين الصيانة

م=2، ح مقابل (س=0.90)=0.44 ، ف =0.988

ملاحظة هامة :

قيم ح،ف هي القيم المناظرة لـ س عندما س=0.90 أمام م=1 مرة، م=2 مرة ثانية من جداول صفوف الانتظار لمجتمع محدود والذي يطلق عليه جداول الصفوف المحدودة Finite Queuing Tables، كما يوضح جزء منها الجداول رقم (12-5).

متوسط عدد وحدات الطباعة التي تعمل.(عدد وحدات الطباعة التي ليست في صف الانتظار)

جـ = ن × ف (1-س)

في حالة الاعتماد على فنى صيانة واحد

جـ = (5) (0.960) (1-0.091)= 4.36

إذن متوسط عدد وحدات الطباعة المعطلة

= 1- 4.36 = 0.64 وحدة

في حالة الاعتماد على اثنين من فنيين الصيانة

جـ = (5) (0.988)(1-0.91) = 4.54

إذن متوسط عدد الوحدات المعطلة

1- 4.54 = 0.46 وحدة.

2- تحليل التكاليف:

عدد الفنيين	متوسط عدد وحدات الطباعة المعطلة (ن-جـ)	متوسط التكلفة في الساعة لإصلاح الأعطال (ن جـ*×120)	تكلفة الفني في الساعة 25 جنيه	التكاليف الكلية
1	0.64	76.8	25	101.8
2	0.46	55.2	50	105.2

يقترح التحليل السابق استئجار فنى واحد، ومن ثم تخفيض التكاليف الكلية بمقدار 3.4 جنيه (105.2-101.8)

نماذج الانتظار واستخدام المحاكاة

تأخذ نعظم مشاكل خطوط الانتظار التي تحدث في الواقع العملـــي نفـــس الخصائص الرياضية للنماذج الأربعة التي عرضنا لها فيما سبق، ولا شــك أن يوجد مشاكل خطوط انتظار أخرى لا سنطبق عليها الخصائص السابقة بل قـد تتبع التوزيع الطبيعي، بدلاً من التوزيع الأســى مثــال ذلــك ورش صيانـــة وإصلاح السيارات، وأنظمة التسجيل للطلاب في الكليات. مثل هذه النظم التي لم يتم دراستها في هذا الفصل، والنماذج التي تعالج هــذه المشــاكل تتصــف بتعقيداتها الحسابية وبشكل لا يسمح بتناولها في فصل واحد، ليس هذا فحسب، بل أن بعض مشاكل صفوف الانتظار في الواقع قد تكون من التعقيد بدرجـــة يصعب صياغتها في نماذج وتحليلها. وفي مثل هذه الحالات يلجأ الباحثين إلى المحاكاة باستخدام الحاسبات Computer Simulation.

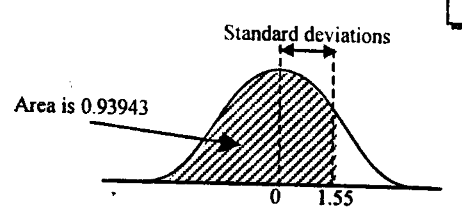
الخلاصة:

تمثل نظرية الصفوف أحد الأدوات الهامة في إدارة العمليات، ولقد تناولنا في هذا الفصل معظم النظم الشائعة في نظرية الصفوف، كما ركزنا على النماذج الرياضية اللازمة لتحليل هذه النظم.

ولقد تمثلت النماذج التي عرضنا لها في هذا الفصل في نموذج الصف الواحد، ونموذج مراكز الخدمة المتعددة، والنموذج ذو معدل الخدمة الثابت، ونموذج المجتمع المحدود، وكما أوضحنا فإن كل من هذه النماذج تتبع توزيع "بواسون" عند وصول الوحدات طالبة الخدمة، كما أن هذه النظم تدعم خدمة الوحدات التي تصل أولاً.

وأخيراً يشير الواقع العملي إلى وجود العديد من نماذج صفوف الانتظار الأكثر تعقيداً من تلك النماذج التي عرضنا لها في هذا الفصل، ولتحليل هذه النماذج من المتوقع استخدام نماذج المحاكاة مثل أسلوب "مونت كارلو" والذي عرضنا له في فصل سابق.

ملحق (1) منحنى التوزيع الطبيعي



To find the area under the normal Curve, you must know how many standard deviations that point is to the right of the mean then, the area under the normal curve can be read directly from the normal table. For example, the total area under the normal curve for a point that is 1.55 standard deviations to the right of mean is 0.96943.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7339	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8434	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0..9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9295	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	09370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9731	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9783	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.938	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9949	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9946
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9934	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9938	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.7	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Source: From Quantitative Approaches to management, 4th ed. By Richard Levin and chartes A. Kirkpatrik.

$$P(X \leq c/\lambda) = \sum_{0}^{c} \frac{\lambda^x e^{\lambda}}{x!}$$

The table Shows 1000 times the Probability of c or less occurrences of an event that has an average number of occurrences of λ

λ	Values of c										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.02	980	1000									
0.04	961	999	1000								
0.06	42	998	1000								
0.08	923	997	1000								
0.10	905	995	1000								
0.15	861	990	999	1000							
0.20	819	982	999	1000							
0.25	779	974	998	1000							
0.30	741	963	996	1000							
0.35	705	951	994	1000							
0.40	670	938	992	999	1000						
0.45	638	925	989	999	1000						
0.50	607	910	986	998	1000						
0.55	577	894	982	998	1000						
0.60	549	878	977	997	1000						
0.65	522	861	972	996	999	1000					
0.70	497	844	966	994	999	1000					
0.75	472	827	959	993	999	1000					
0.80	449	809	953	991	999	1000					
0.85	472	791	945	989	998	1000					
0.90	407	772	937	987	998	1000					
0.95	387	754	929	984	997	1000					
1.00	368	726	920	981	996	999	1000				
1.1	333	699	900	974	995	999	1000				
1.2	301	663	879	966	992	998	1000				
1.3	273	627	857	957	989	998	1000				
1.4	247	592	833	946	986	997	999	1000			
1.5	223	558	809	934	981	996	999	1000			
1.6	202	525	783	921	976	994	999	1000			
1.7	183	493	757	907	970	992	998	1000			
1.8	165	463	731	891	964	990	997	999	1000		
1.9	150	434	704	875	956	987	997	999	1000		
2.0	135	406	677	857	947	983	995	999	1000		

Source: Adapted from E.L. Grant, Statistical Quality Control McGraw-Hill Book Company, New York, 1964 Reproduced by permission of the publisher.

Values of c

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
111	359	623	819	928	975	993	998	1000														
091	308	570	779	904	964	988	997	999	1000													
074	267	518	736	877	951	983	995	999	1000													
061	231	469	692	848	935	976	992	998	999	1000												
050	199	423	647	815	961	966	988	996	999	1000												
041	171	380	603	781	895	955	983	994	998	1000												
033	147	340	558	744	871	942	977	992	997	999	1000											
027	126	303	515	706	844	927	969	988	996	999	1000											
022	107	269	473	668	816	909	960	984	994	998	999	1000										
018	092	238	433	629	785	889	949	979	992	997	999	1000										
015	078	210	395	590	753	867	936	972	989	996	999	1000										
012	066	185	359	551	720	844	921	964	985	994	998	999	1000									
010	056	163	326	513	686	818	905	955	980	992	997	999	1000									
008	048	143	294	476	651	791	887	944	975	990	996	999	1000									
007	040	125	265	440	616	762	867	932	968	986	995	998	999	1000								
006	034	109	238	406	581	732	845	918	960	982	993	997	999	1000								
005	029	095	213	373	546	702	822	903	951	977	990	996	999	1000								
004	024	082	191	342	512	670	797	886	941	972	988	995	998	999	1000							
003	021	072	170	313	476	638	771	867	929	965	984	996	997	999	1000							
002	017	062	151	285	446	606	744	847	916	957	980	991	996	999	999	1000						
002	015	054	134	259	414	574	716	826	902	949	975	989	995	998	999	1000						
002	012	046	119	235	384	542	687	803	886	939	969	986	994	997	999	1000						
001	010	040	105	213	335	511	658	780	869	927	963	982	992	997	999	999	1000					
001	009	034	093	192	327	480	628	755	850	915	955	978	990	996	998	999	1000					
001	007	030	082	173	301	450	509	729	830	901	947	973	987	994	998	999	1000					
001	006	025	072	153	276	420	569	703	810	887	937	967	984	993	997	999	999	1000				
001	005	022	063	140	253	392	539	676	788	971	926	961	980	991	996	998	999	1000				
000	004	019	055	125	231	365	510	648	765	954	915	954	976	989	995	998	999	1000				
000	004	016	048	112	210	338	481	620	741	935	902	945	971	986	993	997	999	1000				
000	003	014	042	100	191	313	453	593	717	816	888	936	966	983	992	996	998	999	1000			
000	002	009	030	074	150	256	386	523	653	763	849	909	949	973	986	993	997	999	999	1000		
000	001	006	021	055	116	207	324	456	587	706	803	876	926	959	978	989	995	998	999	1000		
000	001	004	015	040	089	165	269	392	522	645	752	836	898	940	967	982	991	996	998	999	1000	
000	000	003	010	029	067	130	220	333	458	586	697	792	864	917	951	973	986	993	997	998	999	1000

Values of $e^{-\lambda}$

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
0.0	1.0000	1.6	0.2019	3.1	0.0450	4.6	0.0101
0.1	0.9048	1.7	0.1827	3.2	0.0408	4.7	0.0091
0.2	0.8187	1.8	0.1653	3.3	0.0369	4.8	0.0082
0.3	0.748	1.9	0.1496	3.4	0.0334	4.9	0.0074
0.4	0.6703	2.0	0.1353	3.5	0.0302	5.0	0.0067
0.5	0.6065	2.1	0.1225	3.6	0.0273	5.1	0.0061
0.6	0.5488	2.2	0.1108	3.7	0.0247	5.2	0.0055
0.7	0.4966	2.3	0.1003	3.8	0.0224	5.3	0.0050
0.8	0.4493	2.4	0.0907	3.9	0.0202	5.4	0.0045
0.9	0.4066	2.5	0.0821	4.0	0.0183	5.5	0.0041
1.0	0.3679	2.6	0.0743	4.1	0.0166	5.6	0.0037
1.1	0.3329	2.7	0.0672	4.2	0.0150	5.7	0.0033
1.2	0.3012	2.8	0.0608	4.3	0.0136	5.8	0.0030
1.3	0.2725	2.9	0.0550	4.4	0.0123	5.9	0.0027
1.4	0.2466	3.0	0.0498	4.5	0.0111	6.0	0.0025
1.5	0.2231						

ملحق (3) جدول الأرقام العشوائية

52	06	50	88	53	30	10	47	99	37	66	91	35	32	00	84	57	07
37	63	28	02	74	35	24	03	29	60	74	85	90	73	59	55	17	60
82	57	68	28	50	94	03	11	27	79	90	87	92	41	09	25	36	77
69	02	36	49	71	99	32	10	75	21	95	90	94	38	97	71	72	49
98	94	90	36	60	78	23	67	89	85	29	21	25	73	69	34	85	76
96	52	62	86	49	56	59	23	78	71	72	90	57	01	68	57	31	95
33	69	27	21	11	60	95	89	68	48	17	89	34	09	63	50	44	51
50	33	50	95	13	44	34	62	64	39	55	29	30	04	46	44	30	16
88	32	18	50	62	56	43	56	62	31	15	40	90	34	51	95	26	14
90	30	36	24	69	82	51	74	30	35	36	85	01	55	62	64	09	85
50	48	61	18	85	23	08	54	17	12	80	69	24	84	62	16	49	59
27	88	21	62	69	64	48	31	12	73	02	68	00	16	16	46	13	85
45	14	48	32	13	49	66	62	78	41	86	98	92	98	84	54	33	40
81	02	01	78	82	74	97	37	45	31	94	99	42	49	27	64	89	42
66	83	14	74	29	76	03	33	11	97	59	81	72	00	94	61	13	52
74	05	81	82	93	90	69	33	52	78	13	06	28	30	64	23	37	39
30	34	87	01	94	11	48	82	59	94	25	34	32	23	17	01	58	73
59	55	72	33	62	13	74	68	22	44	42	09	32	46	71	79	45	89
67	09	80	98	99	25	77	50	03	32	36	63	65	75	64	19	95	88
60	77	46	63	71	69	44	22	03	85	14	48	69	13	30	50	33	24
60	08	19	29	36	72	30	27	50	64	85	72	75	29	87	05	75	01
80	45	86	99	02	43	87	08	86	84	49	76	24	08	01	86	29	11
53	84	49	63	26	65	72	84	85	63	26	02	75	28	62	62	40	67
69	64	12	98	51	36	17	02	15	29	16	52	56	43	29	22	08	62
37	77	13	10	02	18	13	19	32	85	31	94	81	43	31	58	33	51

* Source: Excerpted from A million Digits with 100,000 Normal Divests. The Free Press, 1955 P.7 with permission of the Rand. Corporation.

المراجــع العربيــــة

1) أبو رمان، محمد عبد العزيز، البرمجة الخطية، النظرية والتطبيق (الطبعة الأولى) القاهرة: المطبعة الفنيـــة الحديثة، 1980.

2) البكري، سونيا محمد، تخطيط ومراقبة الإنتاج، الاسكندرية، الدار الجامعية، 2000.

3) الحناوي، محمد صالح ماضي، محمد توفيق، تخطيط ومراقبة الإنتـــاج: مدخـــل بحـــوث العمليـــات، الاسكندرية: الدار الجامعية 1993.

4) الدجاني، عامر، طريقة المسار لحرج في إدارة المشاريع الإنشائية. القاهرة، دار المستقبل العربي، 1985.

5) السيد إسماعيل، استخدام الأساليب الكمية في الإدارة، كلية التجارة، جامعة الاسكندرية، 1998.

6) عبد القادر، محمود سلامة، الربح، طارق المأمون، تخطيط ومتابعة المشروعات باستخدام طريقة المسار الحرج وبيرت، الكويت، دار القبس، 1977.

7) ماضي محمد توفيق الأساليب الكمية في مجال إدارة الإنتاج والعمليات، الاسكندرية، الكتاب العـــربي الحديث 1987.

8) ماضي، محمد توفيق، إدارة الإنتاج والعمليات، الاسكندرية، قسم إدارة الأعمال، 1996.

المراجــع الأجنبيــة

1) Baker, K. R., Introduction to Sequencing and Scheduling. John Wiley & Sons, New York, 1974.

2) Baker, K. R., Elements to Sequencing and Scheduling. Baker Press, Hanover, N.H, 1995.

3) Brown, R.G., Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series, Prentice Hal. Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1963.

4) Compton, J.C. and Compton S,B., Successful Business Forecasting, TAB Books, Blue Ridge Summit, PA. 1990.

5) Conwat, R, W., Maxweel, W.L., and Miller, L.W., Theory of Scheduling, Addison – Wesley, Reading, MA, 1967.

6) Fildes. R., "Quantitative Forecasting – The State of The Art: Econometric Models," Journal of The Operational Research Society, 36, 546 – 580, 1985.

7) French, S., Sequencing and Scheduling John Wiely & Sins m New York, 1986.

8) Grabowski m J., Skubalska, E., and Smutnicki, C., " On Shop Scheduling with Release and Due Dates to Minimize Maximum Lateness, "Journal of the Operational Society, 34, 615 – 20, 1983.

9) Hanssmann, F, and Hess, S.W., " A linear programming Approach to Production and Employment Scheduling, " Management Technology, 1, 46 – 51, 1960.

10) Hax, A/C. and. Meal, H.C., " Hierarchical Integration of Production Planning and Scheduling, " In Studies in Management Sciences, Volume 1, Logistics Geisler. M.A., ed., North Holland – American Elservier, New York, 1975.

11) Heizer, Jay & Render, Barry, Production and Operations Management: Strategies and tactics, Baston: Allyn & Bacon, 1983.

12) Holt, C.C., Modiglinani, J. F., Multh, J.F., and Simon H., " A linear Descision rule for Production and Employment Scheduling, " Management Science 1, 1 – 30, 1953.

13) Huss, W.R., "A Move Toward Scenario Analysis," International Journal of Forecasting, 4, 377 – 388 , 1988.

14) Jarrett, J., "Forecasting Seasonal Time Series of Corporate Earnings: A Note, " Decision Sciences, 21, 888 – 894, 1990.

15) Keefer. D.L. and Verdini. W.A., "Better Estimation of PERT Activity time Parameters, " Management Science, 39, 1086 – 1091, 1993.

16) Kelley, J.E., "Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis," Operations Research, 9, 296 – 320, 1961.

17) Koch, P.D., and Koch, T.W., " Forecasting Stock Returns in The Japanese, UK and US Markets During The Crash of October 1987, " Managerial Finance, 20, 68 – 89, 1994.

18) Liberatore, M.J. and Miller, T. " A Hierarchical Production Planning System, " Interfaces, 15.4, 1 – 11, 1985.

19) Lin E. Y.H., Sharma, B., and Otuteye, E., "An ARIMA Model for Canadian Union Membership Growth, 1911 – 1985, " Applied Economics, 24, 1035 – 1041, 1992.

20) Lockyer, K.G., Introduction to Critical Path Analysis, Pitman Publishing Company, London, U.K, 1969.

24) Makridakis, S.G. and Wheelwright. S.C Forecasting Methods and Applications, John Wiley & Sons, New York, 1978.

25) Makridakis, S.G. and Wheelwright. S.C., eds, The handbook of Forecasting, A Manager's Guide, Jon Wiley & Sons , New York, 1978.

21) Malcolm, D.G., Roseboom, J.H., Clark C.E., and Fazar, W., "Application of a technique for R & D Program Evaluation (PERT), "Operation Reserch, 7, 646 – 669, 1959.

22) Masud, A.S.M. and Hwang. C.L. , " An aggregate Production planning Model and Application of Multiple Obejctive Decision Method, " International Journal of Production Reserch, 118, 115 – 127, 1980.

23) McKay, K.N., Safaynie, Fr., and Buzacott, J.A,m "Job – Shop Scheduling Theroy: What Is Relevant? Interfaces, 18, 48 – 90, 1988.

26) Moder, J.J., Phillips. C.R., and Davis. E.W., Project Management with CPM, PERT and Precedence Diagramming Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1983.

27) Montogomery, D.C., Gardiner, J.S and Johnson, L.A., Forecasting and Time Series Analysis, McGraw – Hill Book Company, New York, 1990.

28) Nebol, E., " Macro Production Planning: An Applied Reserch Project," Interfaces, 17, 71 - 127, 1987.

29) Osman, I.H. and Potts, C.N., " Simulated Annealing for Permutation Flow – Shop Scheduling, " OMEGA, 17, 51 – 557, 1989.

31) Sipper, Damiel & Bulfin, Ronert. JR, Production., Planning, Control and Integration, N.Y: Mc Grow-Hill Co., 1998.

30) Slowiniski. R. and Weglarz, J., eds., Advances in Project Scheduling Elservier, Amsterdam, 1989.

32) So, K. C. "Some Heuristics for Scheduling Jobs on Parallel Machines with setups, " Management Science, 36, 467 – 475, 1990.

33) Stadtler, H., "Tuning Aggregate Planning With Sequencing and Scheduling, " In Multi-stage Production Planning and Inventory Control. Axster, S., Schneeweis, C. and Silver, E., eds, Springer–Verlag, Belin, 1986.

34) Ulrich, K.T., and Eppinger, S.D., Product Design and Development m The Mc Graw – Hill Companies, Inc, New York, 1995.

35) Van Larrhoven, P.J.M., Arts, E.H., and lebstera, J,k., "Job Shop Scheduling by Simulated annealing, "Operations Research, 40, 113 – 125, 1992.

37) Zoller, K., "Operational Disaggregation of Aggregate Production Plan, "Mangagement Science, 17, B553 – B549, 1971. Arkin, E.M. and Roundy, R.O., " Machines with proportional Weights, "Operations Research, 39, 64 – 81, 1991.

36) Yahdav, D., " Tracking the Elusive project,: Byte, 17, 119 – 122, 1992.